Dimensionado y Planificación de Redes

Tema 5 – Sistemas con fuentes finitas

Ramón Agüero Calvo
ramon.agueroc@unican.es

Contenido

- Introducción
- Modelos de fuente
- Sistemas de espera pura (1 servidor)
- Sistemas de pérdida pura – Fórmula de Engset

Contenido

Motivación

- Estos sistemas se dan cuando el número de usuarios del sistema es pequeño
- No se puede hablar de una tasa de llegadas constante, ya que un usuario en el sistema no puede generar más peticiones
- Distinción entre diferentes tipos de terminal
  - Un único terminal puede comportarse como fuente *"infinita"*, cuando genera paquetes según un proceso de Poisson (de manera continuada)
  - Si una petición solo puede llevarse a cabo tras haber finalizado la anterior (protocolo *stop&wait*, servicios de compra on-line, etc) el modelado sería diferente
- En función del número de fuentes (M), de servidores (S) y del tamaño del subsistema de espera (W) se podrían distinguir varios supuestos
  - Si S ≥ M: no hay ni pérdida ni espera, ya que una petición siempre encontrará un recurso disponible
  - Si S+W ≥ M y M ≥ S: no se pierden peticiones – sistema de espera pura
  - Si W = 0, M ≥ S: no hay espera – sistema de pérdida pura

Contenido

Modelos de fuente

- A la hora de modelar el comportamiento de las fuentes de tráfico hay que distinguir el nivel en el que se está trabajando: (1) sesión, (2) flujo, (3) paquete
- Una aproximación sencilla y bastante empleada es utilizar el modelo ON-OFF
- La fuente puede estar en dos estados diferentes
  - ON: genera llamadas a una tasa determinada
  - OFF: no genera tráfico
- A partir de las probabilidades de los estados ON y OFF y de la velocidad, se puede obtener la velocidad media de la fuente

Modelos de fuente

- Otra aproximación, complementaria con la anterior, es asumir que las fuentes tienen dos "estados"
  - [OFF] Thinking time (reposo)
  - [ON] Holding time (activo)
- En el estado de reposo se establece el instante en el que se generará la siguiente llamada (habitualmente, a través de una va exponencial negativa (T_0) de media $E(T_0) = \alpha^{-1}$
- En el estado activo se establece la duración de la llamada en curso, utilizando (habitualmente) una va exponencial negativa (T_S), de media $E(T_S) = \mu^{-1}$
- A partir de esos valores se puede establecer el "tráfico" por fuente, como $a = \frac{\alpha}{\mu}$
- Como se verá posteriormente, el problema se da cuando la fuente se encuentra en otra situación (por ejemplo, esperando)
  - Notar que las vas asumen que la fuente se encuentra en un estado concreto

Contenido

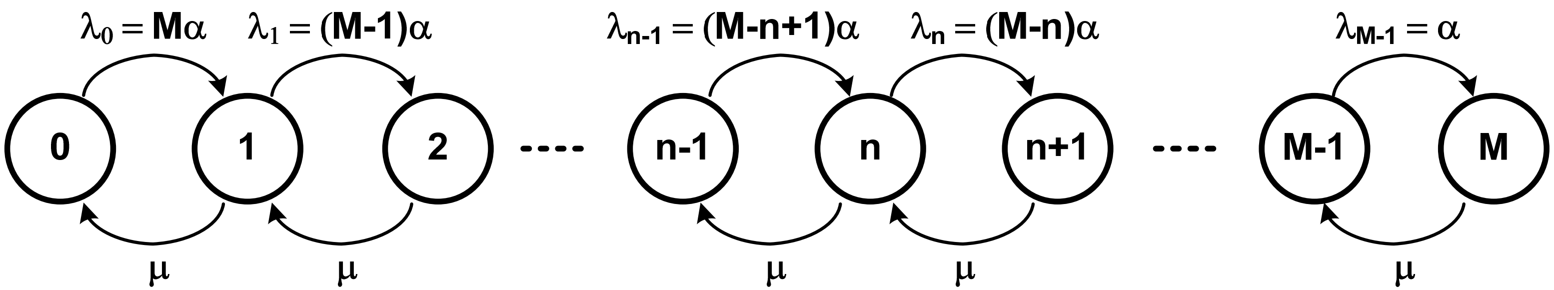
- Introducción
- Modelos de fuente
- Sistemas de espera pura (1 servidor)
- Sistemas de pérdida pura – Fórmula de Engset

Introducción

- Se considera un sistema con un único recurso, M fuentes y capacidad suficiente de espera (esto es $K+1 \geq M$)
- Las fuentes (libres) generan peticiones a una tasa α
  - [**IMPORTANTE**] La va correspondiente (exponencial negativa de media α^{-1}) está condicionada al hecho de que la fuente esté en el estado libre (*Thinking*)
  - Cuando una fuente está en el sistema (ya sea en el servicio o esperando) **no** puede generar más peticiones
- La duración media del servicio sigue una distribución exponencial negativa, con media μ^{-1}
- Como el sistema tiene capacidad suficiente para todas las posibles peticiones no hay pérdidas, por lo que se trata de un sistema de espera pura

Modelo

- La cadena de Markov correspondiente tendrá M+1 estados
- La tasa de nacimiento no es constante, ya que depende del número de fuentes libres
  - $\lambda_n = (M-n)\alpha$
- La tasa de muerte es igual para todos los estados (μ), ya que únicamente hay un recurso disponible



- Aplicando balance de flujos y resolviendo para p_n, se llega a…

$$p_n = \frac{M!}{(M-n)!} a^n \cdot p_0 \qquad p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{M} \frac{M!}{(M-i)!} a^i}$$

Parámetros de rendimiento

- Número medio de unidades en el sistema

$$\overline{N_t} = \sum_{i=0}^{M} i \cdot p_i = \cdots = M - \frac{1 - p_0}{a}$$

- Número medio de unidades en espera

$$\overline{N_Q} = \sum_{i=1}^{M} (i - 1) \cdot p_i = \cdots = M - \frac{(1 - p_0)(1 + a)}{a}$$

- Número medio de unidades en el servidor (coincide con el tráfico cursado)

$$\overline{N_S} = \sum_{i=1}^{M} p_i = 1 - p_0 = \overline{N_t} - \overline{N_Q}$$

- Número medio de fuentes libres

$$\overline{N_m} = \sum_{i=0}^{M} (M - i) \cdot p_i = \cdots = \frac{1 - p_0}{a}$$

Parámetros de rendimiento

- Al aplicar la relación de Little se tiene que tener en cuenta que la tasa de llegadas no es constante, por lo que se tiene que obtener su valor medio

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{M} \lambda_i \cdot p_i = \sum_{i=0}^{M} (M-i) \cdot \alpha \cdot p_i = \cdots = \mu \cdot (1 - p_0)$$

- A partir de la que se pueden obtener los tiempos medios de permanencia en el sistema, en espera y en el servidor

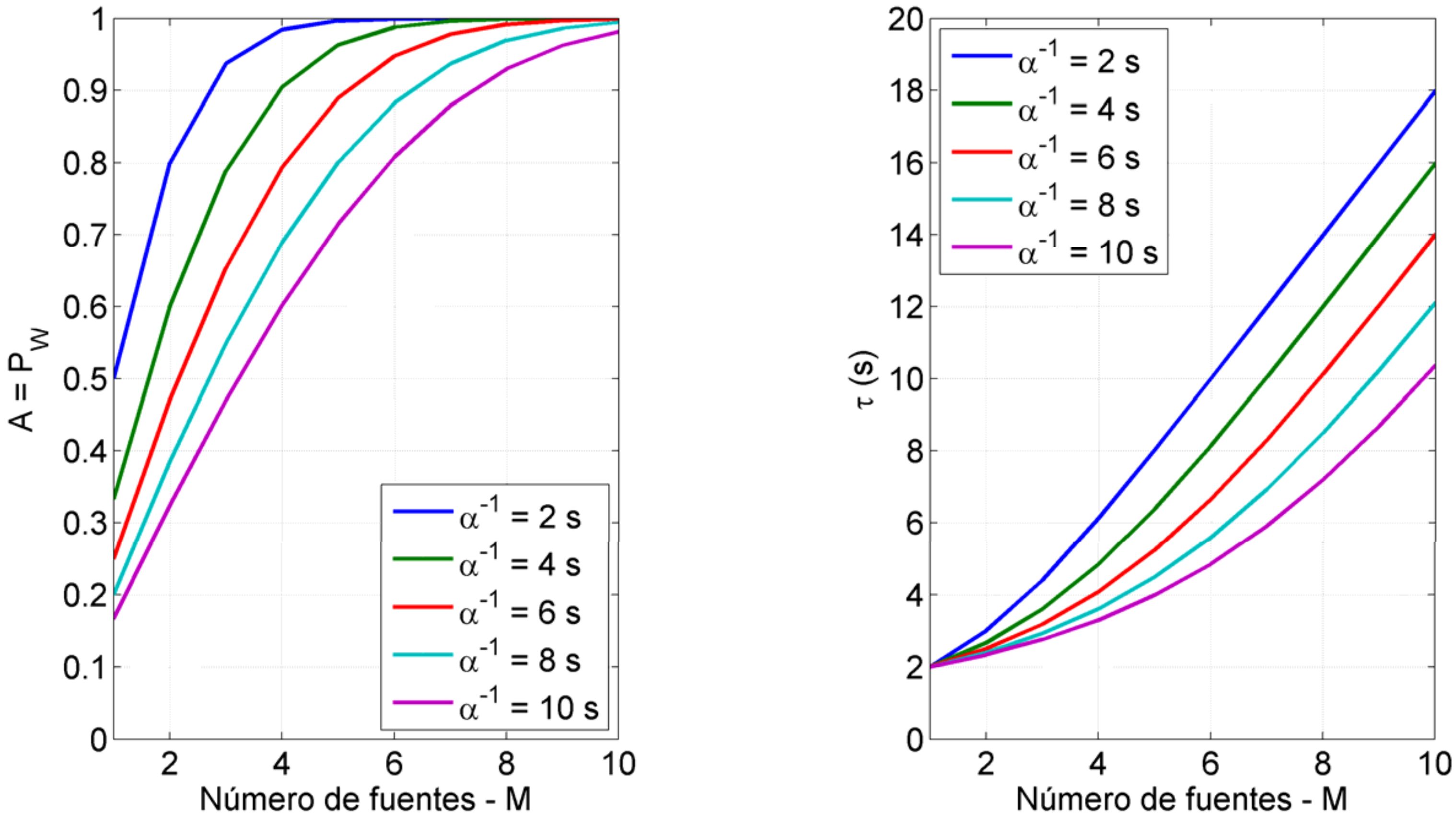
$$\overline{T_t} = \frac{\overline{N_t}}{\bar{\lambda}} = \cdots = T_S \left(\frac{M}{1-p_0} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\overline{T_Q} = \frac{\overline{N_Q}}{\bar{\lambda}} = \cdots = T_S \left(\frac{M}{1-p_0} - \frac{1+a}{a} \right)$$

$$\overline{T_{\text{serv}}} = T_s$$

Ejemplo

- Se supone que α^{-1} = {2 4 6 8 10} (seg.) y que Ts = 2 seg.

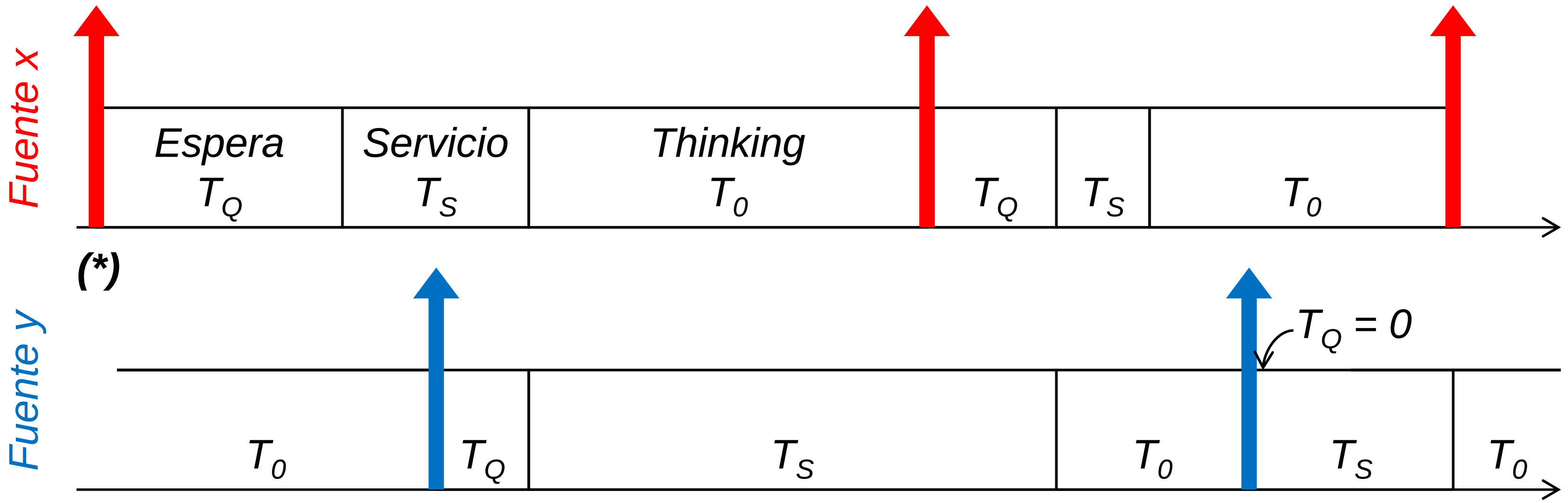


Consideración práctica

- Para poder analizar el rendimiento del sistema se ha partido de tres parámetros: M, α y μ
- M y μ se pueden conocer (estimar) de manera razonablemente sencilla
- La estimación de α es más complicada, ya que la va subyacente está condicionada a que la fuente esté libre
- De hecho, al modelo de fuente visto previamente, habría que añadir el tiempo que dicha fuente permanece en el sistema, esperando
- Es más razonable pensar que se puede estimar la tasa media de generación de paquetes, a partir de observaciones externas al sistema

Estimación de α

- A partir de observaciones externas se puede encontrar el valor de $\bar{\lambda}$
- Se asume, entonces, que $\bar{\lambda} = M \cdot \tilde{\alpha}$, con $\tilde{\alpha}$ siendo la tasa equivalente por fuente *no condicionada* a estar libre
- Asumiendo que $\alpha^{-1} = T_0$, un observador externo estimaría $\tilde{\alpha}^{-1}$ como la suma de tres tiempos: $T_0 + T_Q + T_S$, esto es: tiempo de *thinking*, tiempo de espera y tiempo de servicio



(*) *Se asume que al comienzo hay una única unidad en el sistema (en el recurso)*

Estimación de α

- Se puede escribir, entonces que…

$$\tilde{\alpha}^{-1} = T_Q + T_S + T_0 \rightarrow \frac{1}{\tilde{\alpha}} = T_Q + T_S + \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \tilde{\alpha}\left(T_S + T_Q\right)}$$

con $\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\lambda}}{M}$, siendo $\tilde{\lambda}$ la tasa estimada a partir de observaciones externas

- Se sigue sin poder calcular α a partir de la tasa estimada, ya que T_Q depende de α y no se conoce
- La solución es emplear un algoritmo iterativo, comenzando con un valor de T_Q de 0 y que vaya haciendo sucesivas aproximaciones al valor adecuado de α

Estimación de α - Algoritmo

IN: λ, M, Ts, ε

OUT: τ

(1) $\underline{\alpha} = \lambda/M$, $T_Q = 0$

(2) $\alpha_0 = \underline{\alpha}$, $\alpha_1 = \dfrac{\underline{\alpha}}{1-\underline{\alpha}(T_S+T_Q)}$

(3) While(abs(α0-α1) > ε)

(4) $a = \alpha_1 \cdot Ts$, $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{M} \frac{M!}{(M-i)!} a^i}$ $T_Q = T_S\left(\dfrac{M}{1-p_0} - \dfrac{1+a}{a}\right)$

(5) $\alpha_0 = \alpha_1$, $\alpha_1 = \dfrac{\underline{\alpha}}{1-\underline{\alpha}(T_S+T_Q)}$

(6) End while

(7) $\tau = T_Q + Ts$

Contenido

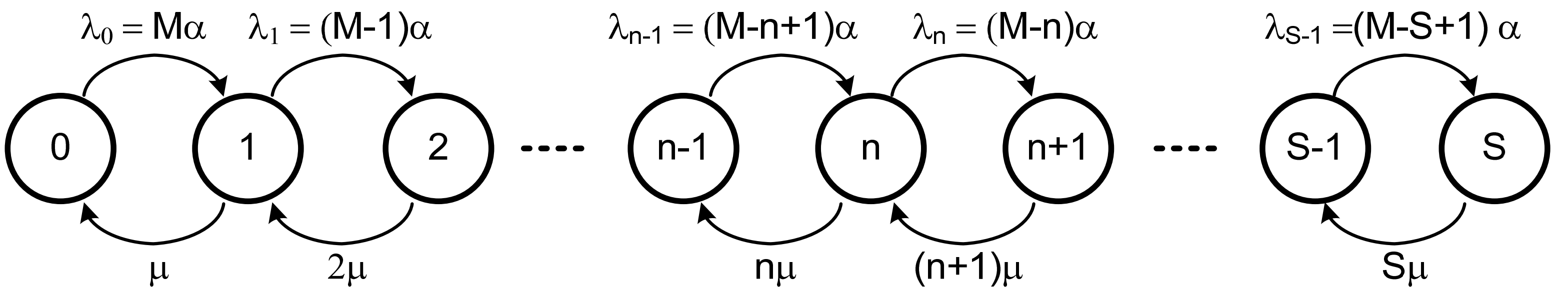
- Introducción
- Modelos de fuente
- Sistemas de espera pura (1 servidor)
- Sistemas de pérdida pura – Fórmula de Engset

Introducción

- En este caso se considera un sistema con S recursos y M fuentes ($S \leq M$), sin capacidad adicional para mantener peticiones en espera
- Como sucedía en el modelo anterior, las fuentes (libres) generan peticiones a una tasa α
  - Cuando una fuente está en el sistema no puede generar más peticiones
- La duración media del servicio sigue una distribución exponencial negativa, con media μ^{-1}
- Como el sistema no tiene capacidad suficiente para todas las posibles peticiones (y no hay espera) se producirán pérdidas: sistema de pérdida pura

Modelo

- La cadena de Markov correspondiente tendrá S+1 estados
- La tasa de nacimiento no es constante, ya que depende del número de fuentes libres
  - $\lambda_n = (M - n)\alpha$
- La tasa de muerte también depende del estado ($n \cdot \mu$), ya que en el estado n hay n "servicios" en curso



- Aplicando balance de flujos y resolviendo para p_n, se llega a…

$$p_n = \binom{M}{n} a^n \cdot p_0 \qquad p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S} \binom{M}{i} a^i}$$

Probabilidad de bloqueo y pérdida

- La probabilidad de bloqueo se corresponde con la probabilidad de que todos los recursos estén ocupados PB=Pr{estado S}

$$PB = p_S = \frac{\binom{M}{S} a^S}{\sum_{i=0}^{S} \binom{M}{i} a^i}$$

- En este caso (al contrario de lo que ocurría con el modelo M/M/S/S) la probabilidad de bloqueo NO coincide con la de pérdida
  - En este caso la probabilidad de pérdida es la probabilidad de que, estando el sistema bloqueado, llegue una petición (idea de probabilidad condicionada)
- Se calcula la probabilidad de pérdida como el cociente entre la tasa de llegadas que se pierden entre la tasa de llegadas media

$$P_L = \frac{\alpha(M-S)p_S}{\sum_{i=0}^{S} \alpha(M-i)p_i}$$

Prob. de pérdida – Fórmula de Engset

- Operando con la expresión anterior, se llega a la fórmula de *Engset*

$$P_L = Eng(S,M,a) = \frac{\binom{M-1}{S} a^S}{\sum_{i=0}^{S} \binom{M-1}{i} a^i}$$

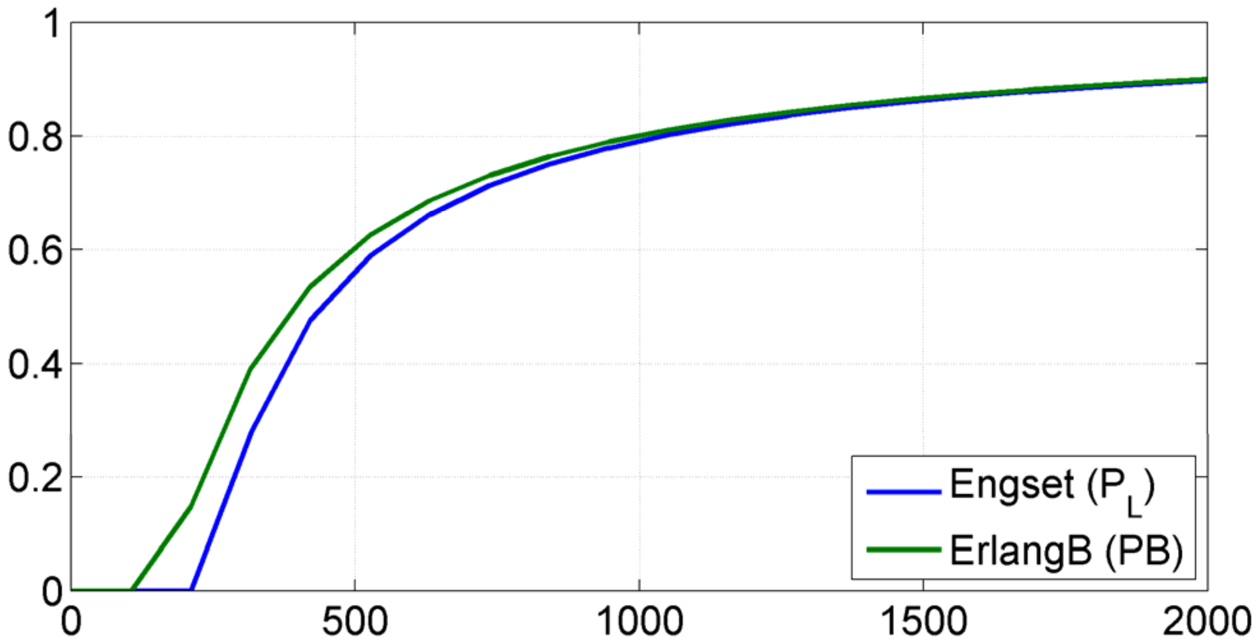
- Destacar que Eng(S,M,a) es la probabilidad de bloqueo que se tendría en un sistema con 1 fuente menos, con lo que P_L < PB
- Al igual que la fórmula de ErlangB se puede resolver de manera recursiva…

$$Eng(k,M,a) = \frac{a \cdot (M-k) \cdot Eng(k-1,M,a)}{k + a \cdot (M-k) \cdot Eng(k-1,M,a)}$$

- Propiedades
  - La fórmula de Engset se puede utilizar para cualquier distribución del tiempo de servicio

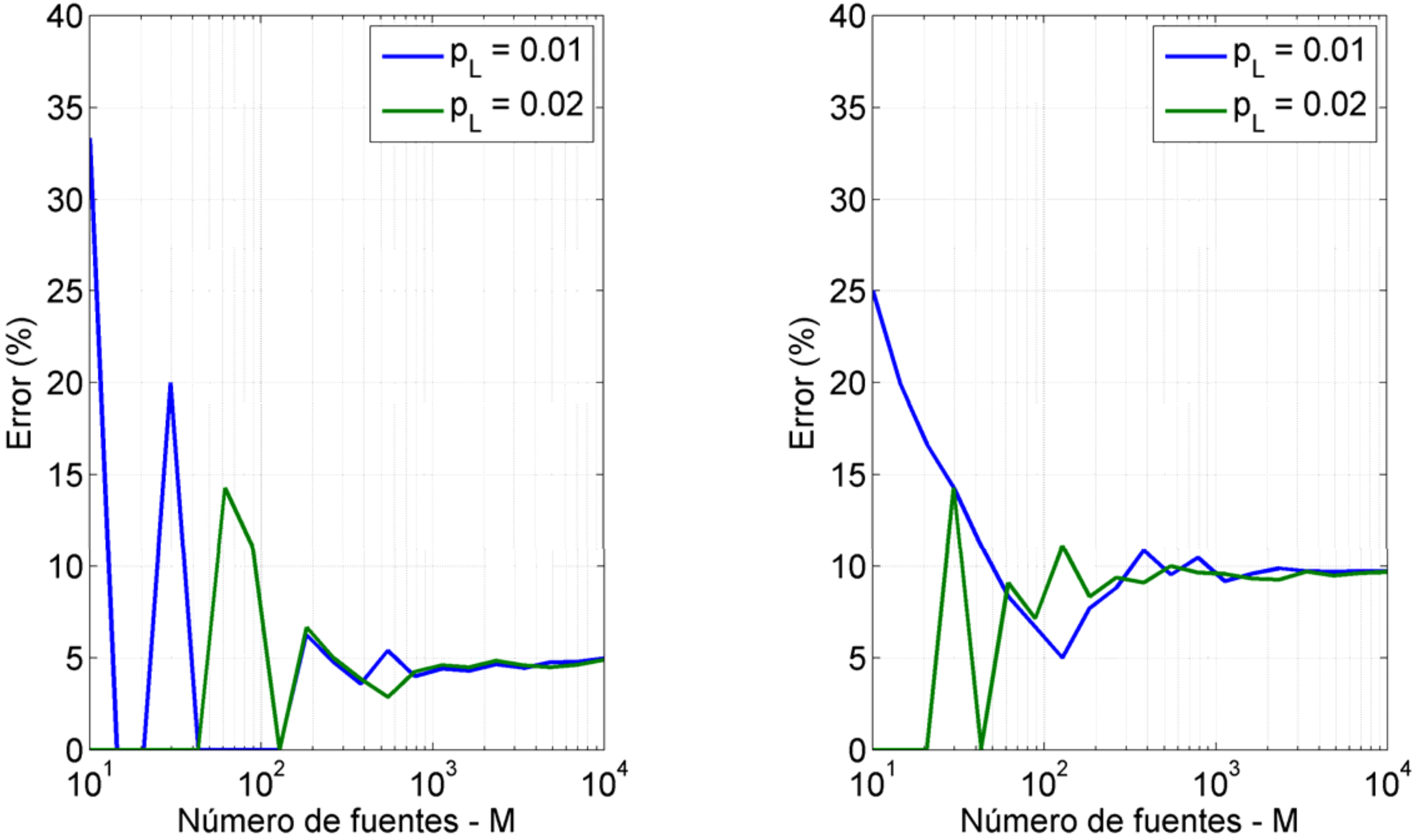
Engset Vs. ErlangB

- Parámetros
  - Se asume que el tráfico por fuente (libre) a = 0.2
  - M = 1…2000
  - S = 40
  - En ErlangB el tráfico ofrecido será el producto de a y M



Engset Vs. ErlangB

- Diferencia relativa entre Engset y Erlang-B para a = 0.05 (izquierda) y a = 0.1 (derecha)



Consideración práctica - Estimación de α

- Al igual que sucedía con el sistema M/M/1/K/M (con K+1≥M), la estimación del tráfico ofrecido por terminal libre (α) es complicado
- A partir de observaciones externas se puede obtener la tasa de peticiones media E(λ), a partir de la que se puede estimar el tráfico ofrecido…

$$TO = E(\lambda) \cdot T_S$$

- Alternativamente, el TO también se puede calcular a partir la tasa de peticiones ofrecida al sistema como…

$$TO = \overline{\lambda_O} \cdot T_S = T_S \sum_{i=0}^{S} \lambda_i \cdot p_i = T_S \sum_{i=0}^{S} (M-i)\alpha \cdot p_i = T_S \left(M \cdot \alpha - \alpha \sum_{i=0}^{S} i \cdot p_i \right)$$

Consideración práctica - Estimación de α

- Además, se sabe que el tráfico cursado se puede calcular como…

$$TC = \sum_{i=0}^{S} i \cdot p_i$$

o, alternativamente…

$$TC = TO(1 - P_L)$$

- Con lo que se llega a la siguiente expresión, a partir de la que se puede conocer el tráfico individual (por fuente libre) en función del TO global al sistema

$$a = \frac{TO}{M - TO(1 - P_L)} \qquad \alpha = \frac{\lambda_o}{M - \lambda_o \cdot T_S(1 - P_L)}$$

- A partir de las expresiones anteriores se puede "construir" un algoritmo para estimar α en función del tráfico ofrecido al sistema, y calcular así la probabilidad de pérdida

Estimación de α y P_L - Algoritmo

IN: M, TO, S, ε

OUT: P_L

(1) $P_L = 0$

(2) Do

(3) $P_L^{aux} = P_L$

(4) $a = \dfrac{TO}{M - TO\left(1 - P_L^{aux}\right)}$

(5) $P_L = \binom{M-1}{S} \dfrac{a^S}{\sum_{i=0}^{S} \binom{M-1}{i} a^i}$

(6) While(abs($P_L - P_L^{aux}$) > ε)