

Hoja de Ejercicios - Tema 5  
Sistemas con fuentes finitas

**Problema 1.**

En una pequeña oficina remota hay tres terminales que se conectan mediante una red de área local a un *router* de acceso; éste, a su vez, se conecta mediante una línea SDSL de 768 kbps a Internet. Los trabajadores de la oficina realizan, con sus terminales, servicios de transacción contra el servidor de la central, que está conectada a Internet. Un servicio de transacción se compone de dos fases: primero se manda un paquete al servidor, y, posteriormente, el servidor responde con un paquete. Un terminal solo puede mandar el siguiente paquete tras haber recibido la repuesta del servidor al anterior. En este servicio los paquetes tienen una longitud media de 4096 Bytes y cada terminal genera, en promedio, 5 paquetes por segundo. Asumir que la duración del servicio está determinada principalmente por la línea de acceso.

- (a) Calcula las probabilidades de los estados de la cadena de *Markov* correspondiente
- (b) Calcula los parámetros de rendimiento del sistema, rellenando la tabla que se muestra seguidamente.

$P_w$	$\overline{N_T}$	$\overline{N_Q}$	$\overline{T_Q}$	$\rho$

- (c) Repetir el apartado anterior, asumiendo que los terminales no deben esperar a la confirmación del servidor y compara los resultados.

**Problema 2.**

Una oficina remota de una empresa tiene cinco puestos de trabajo equipados con ordenadores personales, que se conectan, a través de una red *Ethernet* a un *router* de salida, conectado a la Intranet de la compañía a través de una conexión ADSL.

El funcionamiento de los terminales es el que se indica seguidamente.

- El empleado manda un paquete de petición al servidor de la base de datos de la compañía.
- El servidor, si está ocupado, mantiene la petición en un *buffer* y, al liberarse, atiende la petición y genera el paquete de repuesta con los datos solicitados.
- Cuando el empleado recibe la repuesta, analiza los datos ( $t_{\text{think}}$ ).
- El proceso se repite para cada solicitud, de manera que un empleado no puede enviar peticiones nuevas si está a la espera de la respuesta previa.

Se estiman los siguientes datos:  $\overline{t_{\text{think}}} = 8 \text{ s}$  (va exponencial negativa); longitud media del paquete de la respuesta por parte del servidor  $\overline{L_r} = 10 \text{ kBytes}$  (va exponencial negativa); se estima además que la longitud del paquete enviado por los terminales es mucho menor; la velocidad de la conexión (bajada) es  $v_{\text{download}} = 64 \text{ kbps}$ .

- (a) Calcula el tiempo de servicio  $T_S$ , asumiendo que todos los tiempos (procesado, transmisión en la red Ethernet, transmisión del paquete de petición) son despreciables frente al tiempo de transmisión de la respuesta por parte del servidor. Calcular posteriormente el valor del tráfico ' $a$ ' que genera un usuario en reposo.
- (b) Dibujar la cadena de Markov que modela el sistema y calcular los parámetros de rendimiento del mismo ( $p_0, P_w, N_T, N_Q, T_T, T_Q$ ).

### Problema 3.

Un 'Internet-Café' tiene  $M = 5$  puestos, equipados con ordenadores personales; estos se conectan a través de una red de área local *Ethernet* a un *router*, que, a su vez, se conecta a Internet a través de una conexión ADSL ( $v_{\text{download}} = 128 \text{ kbps}$ ).

En la hora cargada, cuando todos los terminales están ocupados, los clientes solicitan páginas WEB con una longitud media de  $L = 100 \text{ kBytes}$ . Se asume que los clientes actúan de forma racional y esperan a que la página se haya descargado completamente, antes de realizar otra petición al ISP. Cuando la página WEB se descarga, un usuario la 'lee' durante un tiempo  $t_{\text{think}} = 16 \text{ s}$ , para posteriormente solicitar otra página.

Se asume además que las páginas WEB que llegan al DSLAM se memorizan, en el supuesto que la línea de acceso entre el DSLAM y el *router* situado en el 'Internet Café' esté ocupada, y que el *buffer* es lo suficientemente grande como para que no se produzcan pérdidas. Además, se asume que el retardo que sufren las páginas WEB entre el DSLAM y el *router* del 'Internet-Café' es significativamente mayor que el resto de retardos de la red, y que el procesado de los servidores web también se puede considerar despreciable.

- Calcular el tiempo medio de transmisión de una página desde el DSLAM hacia el *router*, la tasa de página por cliente  $\alpha$  y el tráfico  $a$  que genera cada cliente.
- Indicar, en la notación de *Kendall* cuál es el modelo más apropiado para analizar el comportamiento del sistema y calcular sus valores de rendimiento característicos:  $p_0$ ,  $P_w$ ,  $N_T$ ,  $N_Q$ ,  $\tau(T_T)$  y  $T_Q$ .

### Problema 4.

Cuatro fuentes comparten el acceso a dos servidores. Se asume que cada fuente (*libre*) genera peticiones según una variable aleatoria exponencial negativa, con un valor medio de  $\alpha^{-1} = 27$  minutos. El tiempo medio de servicio (también exponencial negativo) es  $\mu^{-1} = 3$  minutos. ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo del sistema? ¿Y la probabilidad de pérdida? ¿Cuál es el incremento en ambas probabilidades cuando se incorpora una fuente nueva al sistema? Si un observador externo estudiara la tasa de llegadas al sistema durante una hora, ¿qué valor obtendría en ambos casos?

### Problema 5.

Se dispone de un servidor de impresión para dar servicio a una oficina con 4 terminales. Se programa el planificador de manera que un terminal no puede generar un trabajo hasta que el anterior no haya finalizado. Se estima que un terminal libre genera 5 trabajos cada hora y que el tiempo medio de impresión es de 3 minutos. Se supone, además, que el sistema tiene memoria suficiente para mantener trabajos en espera.

- ¿Cuál es el tiempo medio de espera en el sistema?
- Para analizar sus prestaciones se incorpora un módulo de gestión, que se encarga de monitorizar el sistema. ¿Qué tasa de llegadas estimaría (por terminal) utilizando únicamente sus observaciones?

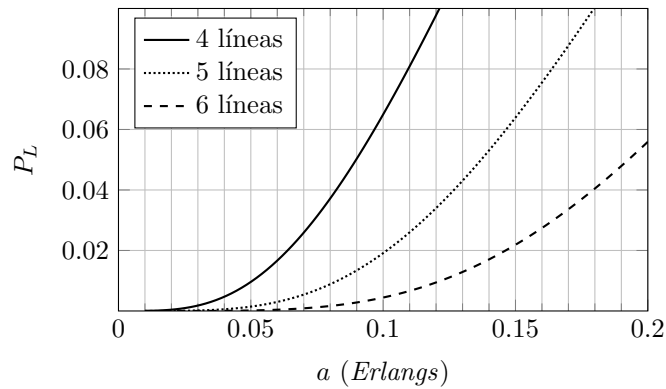
### Problema 6.

Se dispone de una base de datos para dar servicio a una oficina con 5 terminales, que no pueden hacer consultas hasta que la anterior haya sido completada; el sistema es capaz de atender una única petición cada vez, pero que dispone de memoria suficiente para mantener peticiones en espera. Se estima que el tiempo medio para completar una consulta es de 20 segundos. Tras monitorizar el sistema durante un tiempo lo suficientemente largo, se establece que el número de peticiones recibidas es, aproximadamente, 2.1454 por minuto y que el número medio de peticiones en espera es 0.7094.

- ¿Cuál es el tiempo medio de espera?
- Calcular el tiempo medio de *thinking* (tiempo entre que acaba una consulta y se lanza la siguiente) y el tráfico generado por terminal **libre**.

### Problema 7.

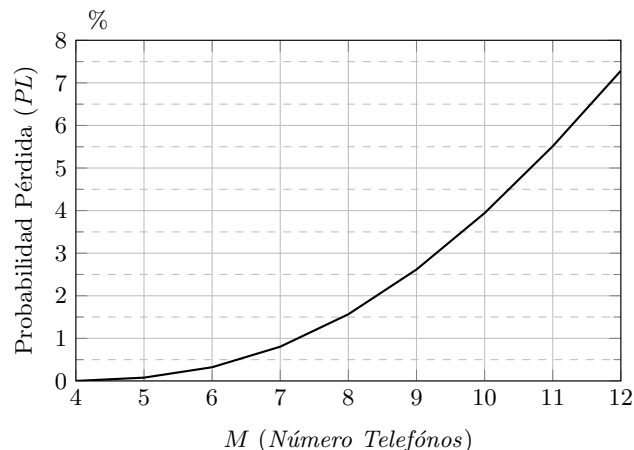
Se pretende instalar una centralita para dar servicio a los 20 usuarios de una oficina. Tras valorar las ofertas de los operadores, se plantean instalar 4, 5 ó 6 líneas de salida. La figura muestra la probabilidad de pérdida ( $P_L = \text{ENG}(S, M, a)$ ) para los tres valores, en función del tráfico por fuente libre. Se considera una duración media por llamada de 3 minutos.



- Si se quiere que la probabilidad de pérdida ( $P_L$ ) no sea superior al 4%, ¿cuál sería la tasa de generación de llamadas por fuente libre máxima para cada una de las posibles configuraciones?
- Se deciden instalar 5 líneas y finalmente se determina que la tasa por fuente libre es  $\alpha = 2$  llamadas por hora. Se instala un sistema de gestión, que monitoriza la actividad de la centralita. ¿Qué tasa de llamadas estimaría el sistema por fuente?

**Problema 8.**

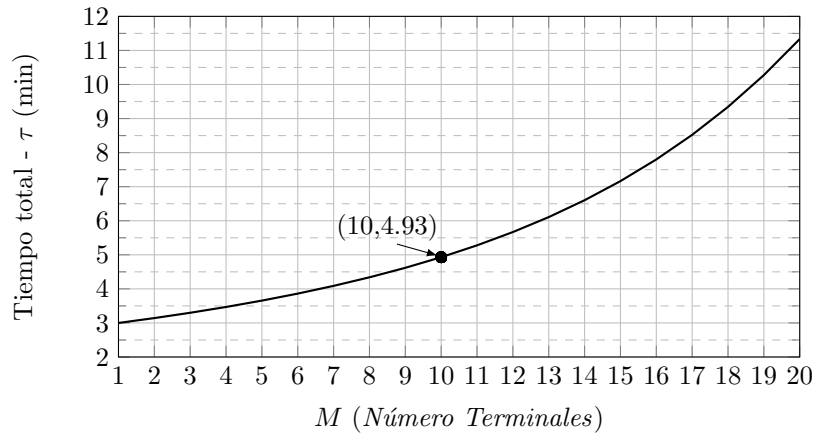
Se quiere dimensionar el sistema de telefonía de una compañía. Se cuenta con grupos de 4 líneas de salida y se quiere establecer el número máximo de teléfonos que se pueden conectar a cada uno de ellos. Se sabe que el tráfico por fuente libre es de 0.2 Erlangs. Se llevan a cabo análisis previos en los que se calcula la probabilidad de pérdida en función del número de teléfonos ( $M$ ), generando la gráfica que se muestra a continuación.



- ¿Cuántos terminales se podrían conectar si se pretende que la probabilidad de pérdida sea inferior al 5%? Si la jornada laboral es de 8 horas, ¿cuánto tiempo estarían las cuatro líneas ocupadas de manera simultánea?
- Para el número de fuentes calculadas en el apartado anterior ¿cuánto tiempo medio hay entre llamadas de un mismo teléfono, si se sabe que la duración media por llamada son 2 minutos? Utilizar el resultado anterior para calcular la tasa de llegadas que observaría un sistema de gestión de monitorización del tráfico de entrada al grupo de 4 líneas.

**Problema 9.**

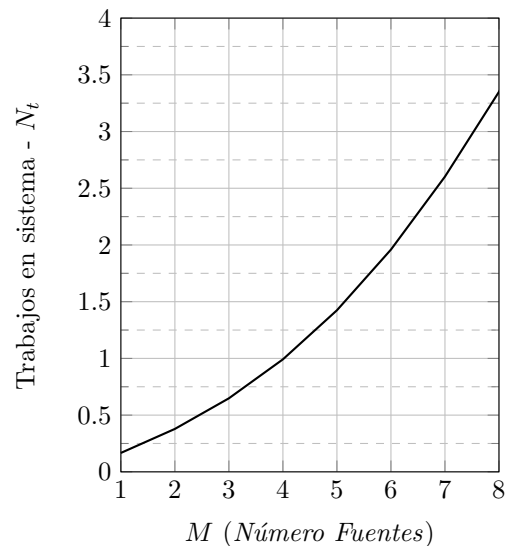
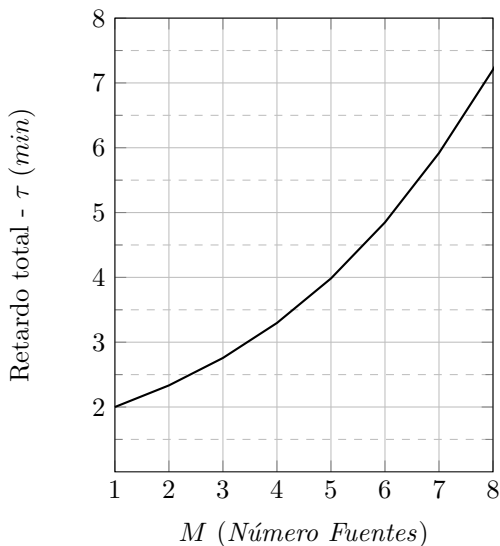
Un centro de investigación dispone de un súper-computador para llevar a cabo análisis complejos. Tras generar una petición, un terminal permanece “parado” hasta obtener sus resultados antes de generar la siguiente petición. Se supone además que el súper-computador tiene capacidad suficiente para almacenar las peticiones que vayan llegando mientras el procesador esté ocupado. Para analizar su rendimiento, se ha hecho una simulación en la que se han ido añadiendo terminales y se ha medido el tiempo transcurrido desde que se genera la petición hasta que se obtienen sus resultados, obteniendo la figura que se muestra a continuación.



- Si se pretende que el tiempo que un análisis esté esperando (desde que se genera la petición en el terminal hasta que comienza a procesarse) sea inferior a 5 minutos, ¿cuántos terminales podrían hacer uso del sistema de análisis?
- En una segunda prueba se conectaron al sistema 10 terminales, que estuvieron activos durante un periodo de 8 horas y se comprobó que el procesador estuvo ocupado 3.696 horas. ¿Cuál es la tasa de generación de simulaciones por fuente libre que utilizan los terminales?
- Durante esta segunda prueba se conectó al sistema una sonda, para medir la tasa de llegadas *real*, ¿qué valor obtuvo? Utilizar dos métodos de cálculo para corroborar la validez del resultado.

**Problema 10.**

A la hora de dimensionar el servidor de impresión para una PYME se llevan a cabo una serie de análisis previos, en los que se incrementa el número de terminales que se conectarían a una impresora. Se supone que todos ellos generan la misma cantidad de trabajos y que, además, no pueden enviar un documento hasta que el anterior se haya imprimido completamente. Las gráficas representan el tiempo total de permanencia en el sistema (espera e impresión) y el número medio de trabajos en todo el sistema.

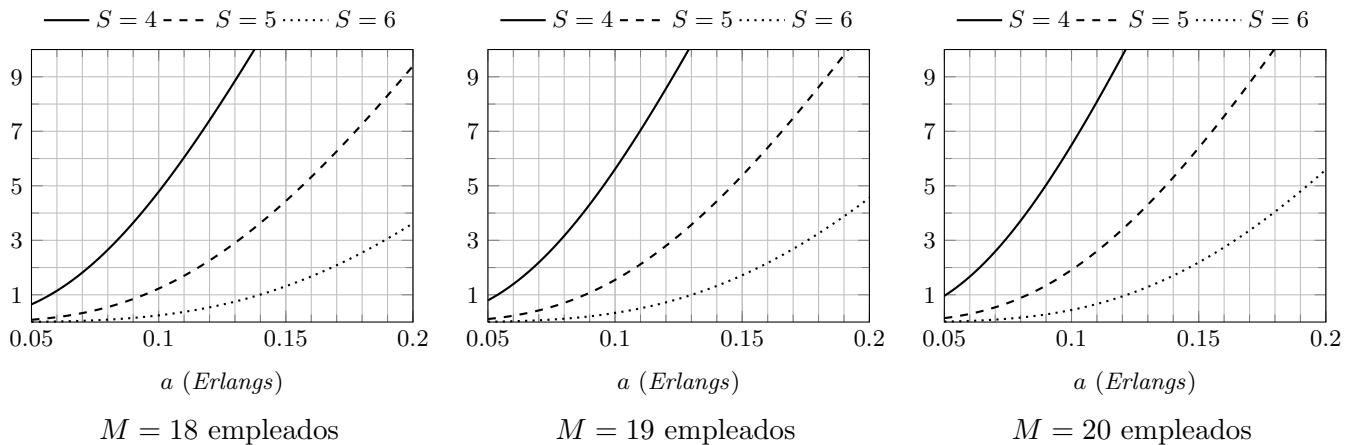


- ¿Cuántos terminales se podrían conectar al servidor si se pretende que el tiempo de espera por trabajo sea inferior a 1.5 minutos?
- ¿Cuál es la tasa de generación de trabajos que se ha utilizado por fuente *libre*?
- Obtener la tasa de generación de trabajos por terminal que observaría un sistema de monitorización externo para el valor de  $M$  calculado en el apartado (a). Comprobar la validez del resultado, utilizando dos estrategias de cálculo diferentes.

**Problema 11.**

En una oficina trabajan  $M$  empleados. Se pretende dimensionar las líneas telefónicas de salida de la centralita, para lo que se encarga un informe a una empresa de ingeniería. En una primera estimación se utiliza un

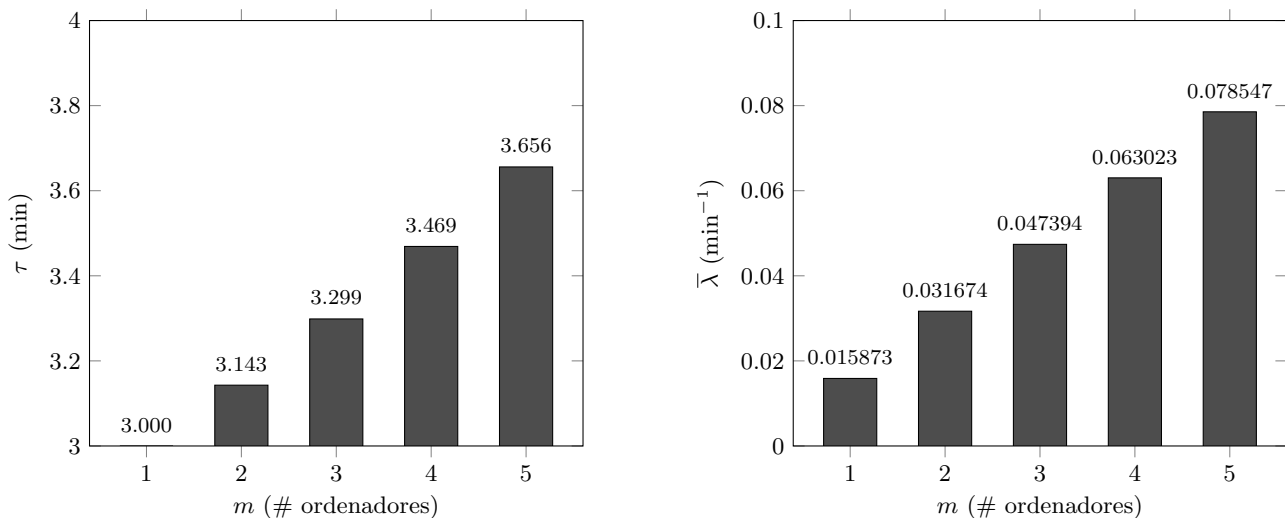
tráfico por fuente libre de 100 *mErlangs* por empleado, y utilizando el modelo de *Engset* se generan las gráficas que aparecen a continuación, que muestran la evolución de la probabilidad de pérdida (en %) en función del tráfico por fuente libre, considerando tres valores diferentes para  $M$ . Asumir un tiempo de servicio medio de 2 minutos.



- ¿Cuántas líneas serían necesarias para que la probabilidad de pérdida en el caso de que hubiera 20 empleados fuera inferior al 5%? Con ese número de líneas, ¿cuál sería el tráfico libre máximo admisible para los tres valores de  $M$  que se han considerado?
- ¿Cuál es el tráfico cursado si hay  $M = 18$  empleados y 5 líneas, asumiendo un tráfico por fuente libre  $a = 0.13$ ? ¿Cuánto tiempo estará activa cada una de las líneas en una jornada laboral (8 horas), si se asume que todas tienen la misma ocupación (estrategia aleatoria)?
- Para completar el proyecto, la empresa instala un sistema de gestión externo, y ve que, con  $M = 19$  empleados y 5 líneas, están todas ocupadas un 6% del tiempo. ¿Cuál es el tráfico por fuente libre? ¿Qué tasa de llamadas observaría el sistema de gestión por cada empleado?

### Problema 12.

Se considera un sistema de impresión, con una única impresora, y capacidad para mantener trabajos en espera. El servicio de IT de la empresa instala un módulo de gestión para evaluar las prestaciones del sistema, con el que representan el tiempo medio que tarda un trabajo en imprimirse (desde que es generado por un empleado), así como la tasa de llegadas total al sistema, en función del número de ordenadores conectados, obteniendo las gráficas que se muestran a continuación. Se asume, además, que un empleado no podrá enviar documentos mientras tenga un trabajo pendiente de impresión.



- ¿Cuál es el tráfico por fuente libre? ¿Cuántos trabajos habrá en media en el buffer de espera cuando  $m = 4$ ?
- Sabiendo que en un sistema  $M/M/1/K+1/m$  (con  $m \leq K+1$ ),  $\bar{\lambda} = \mu(1 - p_0)$ , calcular el tiempo que la impresora estaría activa en una jornada de 8 horas, para los diferentes valores del número de ordenadores conectados.

**Problema 13.**

Una PYME tiene 4 líneas de salida para su centralita. Actualmente cuenta con 10 trabajadores, pero se va a incrementar el personal de manera inminente, por lo que se plantea adquirir mayor capacidad. Para ello se realiza un análisis previo en el que se monitoriza la actividad de la centralita, y se establece la relación entre la probabilidad de pérdida y la tasa de llamadas por teléfono observada (la que realmente generan los empleados), obteniendo la gráfica de la Figura (a). Posteriormente, se mantiene la operación habitual, y se va incrementando el valor de empleados, obteniendo la gráfica de la Figura (b), para la configuración que se decide contratar, que contempla 6 líneas de salida.

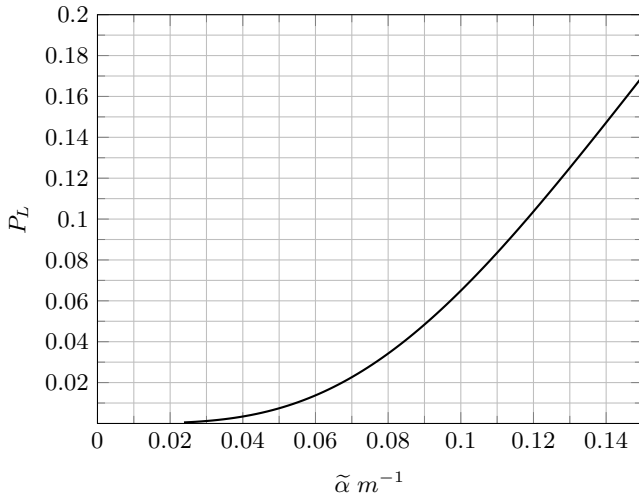


Figura (a)

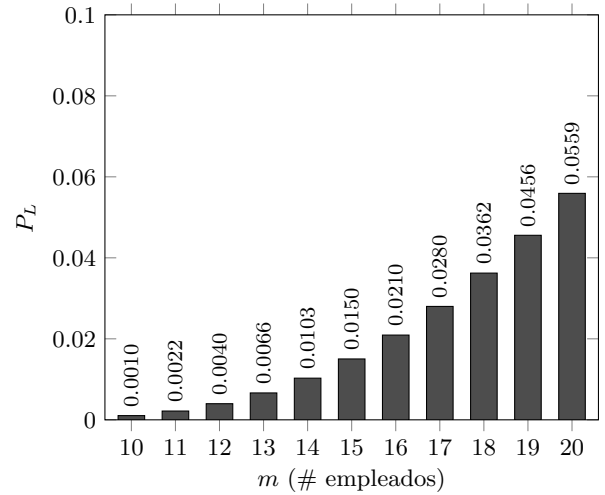


Figura (b)

- (a) Sabiendo que la probabilidad de pérdida que se ha observado durante la operación normal del sistema es  $P_L = 4\%$  y que el tiempo de servicio es 2 minutos, ¿cuál sería el tráfico ofrecido por fuente libre? *Se recuerda que el tráfico cursado por un sistema coincide con el número medio de recursos ocupados.*
- (b) Finalmente se contratan 8 empleados adicionales, y tras monitorizar el sistema se estima que cada trabajador hace, en media, 40.243 llamadas durante una jornada laboral, que se supone de 8 horas. ¿Cuánto tiempo estaría ocupada cada línea en una jornada? ¿Cuánto tiempo estarían las 6 líneas ocupadas simultáneamente?

**Problema 14.**

Una compañía dispone de un sistema *Big Data* para hacer diferentes análisis. Únicamente se puede llevar a cabo un análisis cada vez, y el sistema tiene capacidad para mantener peticiones en espera. Se decide que cuando un terminal genere una petición, no pueda lanzar más hasta que la anterior no haya concluido. Para establecer el número de terminales,  $M$ , que podrían hacer uso del recurso, se hace una serie de análisis previos, en los que se caracteriza la inactividad total del sistema (asumiendo un periodo de observación de 10 horas),  $\psi$ , y el tiempo total por análisis (espera más procesado),  $\tau$ , obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla.

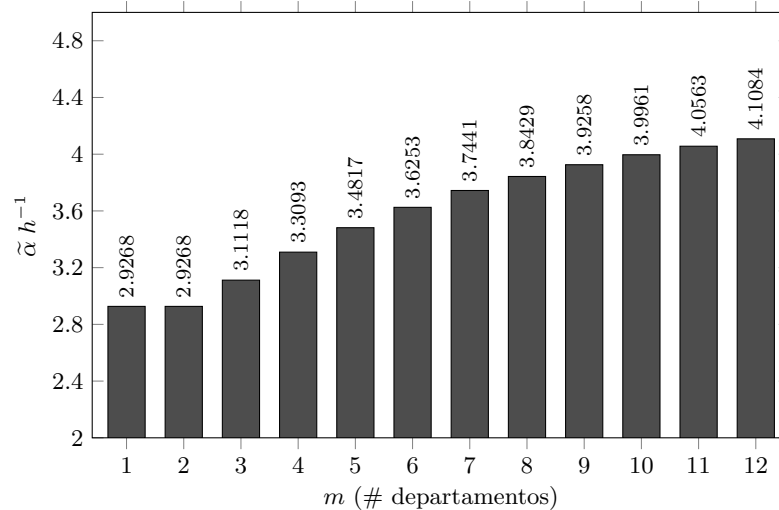
$M$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\psi$ (h)	6.6667	4	2.1053	0.9524	0.367	0.1209	0.0344	0.0086
$\tau$ (s)	20	26.6667	36	48.4211	63.8095	81.4679	100.4834	120.1376

- (a) Si se pretende que el tiempo de espera por análisis sea inferior a 50 segundos, ¿cuántos terminales podrían conectarse al sistema? Para ese valor de  $M$ , ¿cuánto tiempo estaría el procesador activo por día, si el sistema permanece activo durante 16 horas?
- (b) ¿Cuál es la tasa por fuente libre?
- (c) Si finalmente se deciden conectar 6 fuentes, ¿cuál sería la tasa de llamadas real por fuente? Realizar el cálculo de dos maneras diferentes, para comprobar su validez.

*Asumir que se dan las condiciones para modelar el sistema como un  $M/M/1/K+1/M$  ( $K+1 \geq M$ ), para el que se sabe que la tasa de llegada media al sistema es  $\bar{\lambda} = \mu(1 - p_0)$*

### Problema 15.

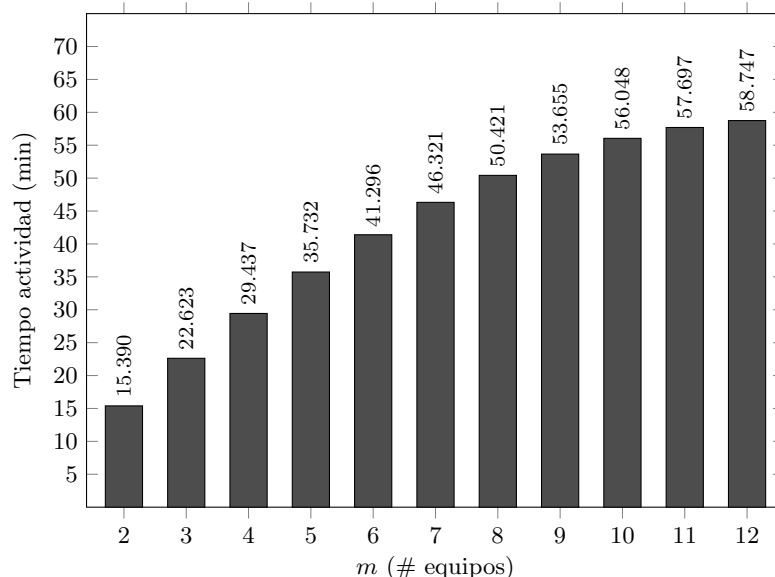
Una compañía cuenta con  $\phi$  recursos de computación en la nube para llevar a cabo estudios *Big Data*. Dado el volumen de los datos a procesar, se decide que las peticiones no puedan esperar cuando los recursos estén ocupados. El servicio se le ofrece a un conjunto de  $M$  departamentos, que no podrían generar más peticiones si ya tienen una en proceso. Se detecta que la probabilidad de pérdida es elevada, por lo que se lleva a cabo un análisis del rendimiento del mismo. En él se va incrementando el número de departamentos que genera peticiones, y se monitoriza la tasa real de análisis solicitados por departamento, obteniendo los datos que se muestran en la gráfica.



- Indicar, de manera razonada, el valor de  $\phi$ .
- Si se sabe que el tiempo medio por análisis es de 8 minutos, ¿cuál es la tasa de generación de peticiones por fuente libre?
- Se decide finalmente que únicamente 5 departamentos puedan usar el servicio. ¿Cuál es la probabilidad de pérdida del sistema? *Recordar que el tráfico cursado se puede calcular como  $\sum_{i=0}^S ip_i$ , siendo  $i$  el estado correspondiente en la cadena de Markov, y que  $TC = TO(1 - P_L)$ .*
- Asumiendo una jornada laboral de 10 horas, ¿cuánto tiempo estarían los  $\phi$  recursos ocupados?

### Problema 16.

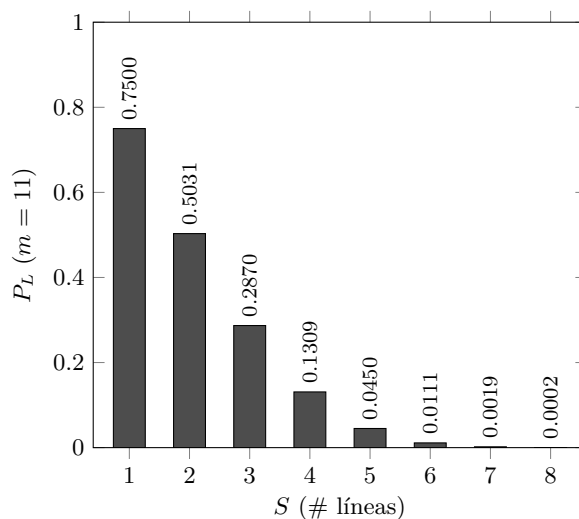
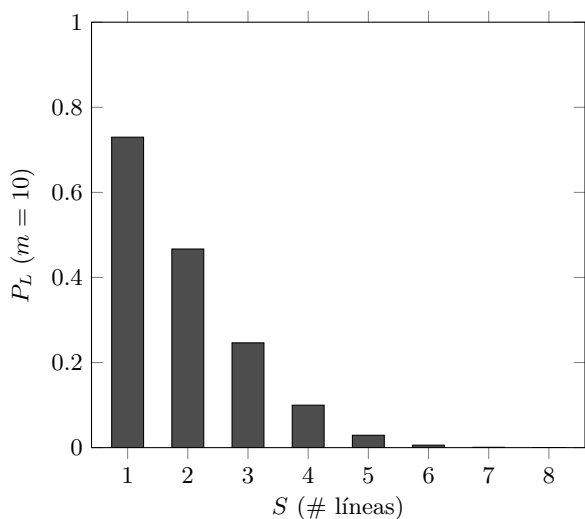
Se decide centralizar el servicio de impresión de una PYME, para lo que se adquiere una máquina de altas prestaciones, conectándose los equipos de los usuarios a una única cola de impresión. Como la empresa que presta el servicio recomienda que la impresora no esté activa más de 6 horas al día, la compañía hace un análisis de las prestaciones del sistema. Para ello va conectando equipos, y monitoriza el tiempo de actividad de la impresora a lo largo de una hora, obteniendo la gráfica que se muestra en la figura. Se establece que el tiempo medio de impresión (servicio) de los documentos que envían los trabajadores es de 2 minutos.



- (a) Si la jornada laboral es de 8 horas, ¿cuántos equipos se podrían conectar como máximo a la impresora?
- (b) Conectando 4 clientes, se determina que el tiempo medio que transcurre desde que se envía un trabajo hasta que este finaliza es de 2 minutos y 58.365 segundos. Sabiendo que en un sistema  $M/M/1/K+1/m$ , con  $m \leq K+1$ ,  $\bar{\lambda} = \mu(1 - p_0)$ , ¿cuántos trabajos por hora enviaría un equipo? ¿Cuál es la tasa por fuente libre,  $\alpha$ ?
- (c) Comprobar la validez del valor de  $\alpha$ , utilizando la cadena de Markov correspondiente, cuando  $m = 2$ .
- (d) Cuando se conectan 5 equipos, ¿cuánto tiempo debería esperar cada trabajo en la cola de impresión? ¿Cuál es el número medio de trabajos esperando?

**Problema 17.**

Una PYME cuenta con 10 trabajadores. A la hora de dimensionar el número de líneas telefónicas para alimentar su centralita se estableció que la probabilidad de pérdida tenía que ser inferior al 5%. Ante la incorporación de un nuevo empleado, se decide analizar el comportamiento del sistema, obteniendo las dos gráficas que se muestran a continuación.

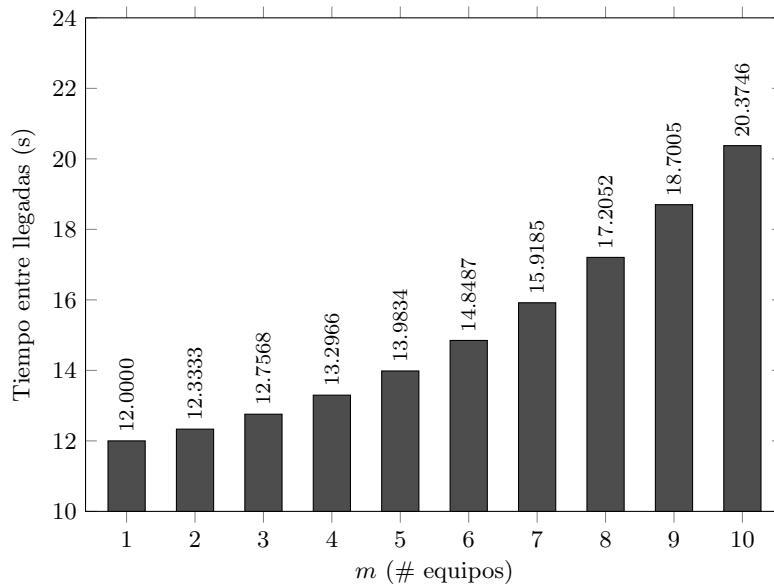


- (a) ¿Cuántas líneas de teléfono tenía la PYME inicialmente? ¿Habría que añadir alguna tras la contratación del nuevo empleado? Calcular el tráfico por fuente libre,  $a$ .
- (b) Calcular, asumiendo que haya 10 empleados, el tiempo en el que todas las líneas están ocupadas simultáneamente en un día, suponiendo jornadas de 8 horas. Con los datos disponibles, ¿cómo se tendría que calcular dicho tiempo en el supuesto de que hubiera 11 empleados?
- (c) Tras la contratación del empleado adicional, se observa que cada uno de ellos hace, en media, una llamada cada 12.9128 minutos. Si se sabe que el tiempo medio de duración de una llamada son 3 minutos, ¿cuál es la tasa de generación de llamadas por fuente libre? Comprobad la validez del resultado, utilizando el valor de  $a$  calculado en el apartado (a).

**Problema 18.**

Un grupo de investigación utiliza un servicio de análisis en la nube. Para determinar el número de equipos que se pueden conectar al frontal del sistema, se hacen medidas en las que se va incrementando el número de terminales conectados, y se mide el tiempo que hay entre peticiones consecutivas de una misma fuente (se asume que un terminal no puede generar más peticiones hasta que la anterior haya concluido). El sistema cuenta con capacidad para mantener peticiones en espera.

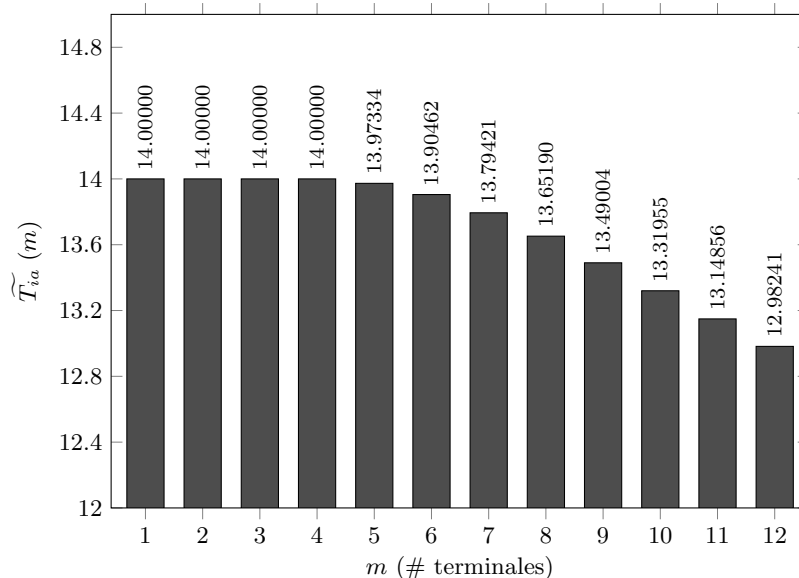




- (a) Sabiendo que el tiempo medio de análisis es de 2 segundos, ¿cuál es la tasa por fuente libre utilizada?
- (b) ¿Cuánto tiempo estaría activo el procesador (en una hora) cuando  $m = 2$ ? Haced el calculo de dos maneras diferentes. para comprobar la validez del resultado.
- (c) ¿Cuántas peticiones habría en media en el sistema cuando  $m = 8$ ? ¿Cuál sería en este caso el tiempo en el que el procesador está activo?

**Problema 19.**

Una empresa dispone de un súper-computador para realizar análisis bursátiles. Debido al gran volumen de datos que se maneja, no se pueden mantener peticiones en espera. Además, cada terminal no puede generar más solicitudes hasta que la anterior haya finalizado (o se haya rechazado). Para comprobar el funcionamiento de la máquina, el departamento de IT va incrementando el número de terminales conectados al súper-computador, y se monitoriza el tiempo entre peticiones consecutivas de los terminales. La figura representa el promedio de dichos tiempos, a medida que se va incrementando el número de terminales.

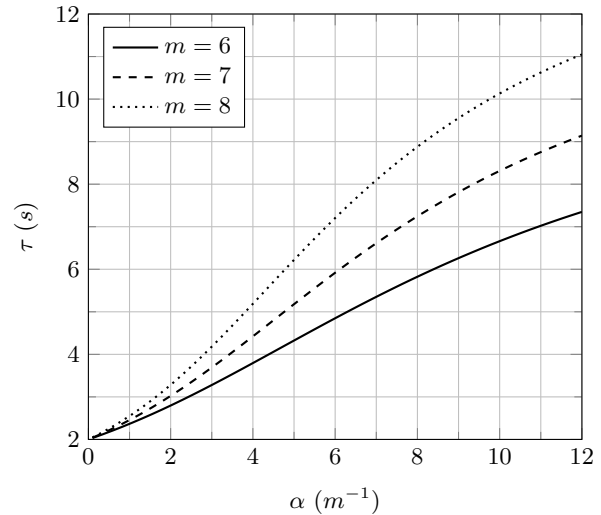
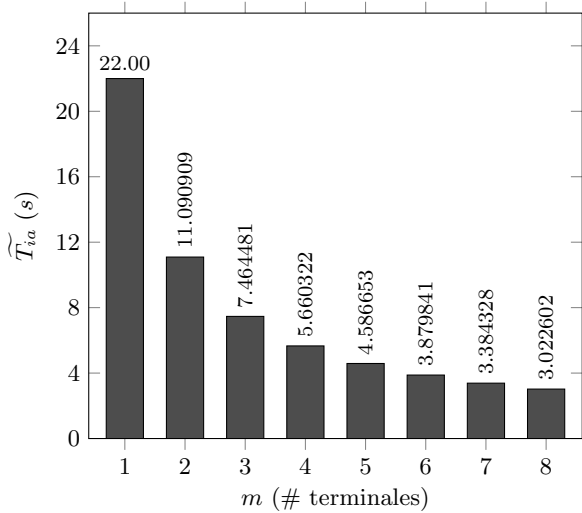


- (a) ¿De cuántos procesadores dispone el procesador?
- (b) Si se sabe que un terminal *libre* generaría 6 análisis por hora, ¿cuál es el tiempo medio que tarda cada análisis en ejecutarse?
- (c) ¿Qué porcentaje de análisis se perderían si el número de terminales que se conectan al súper-computador es  $m = 8$ ?
- (d) Asumiendo también que  $m = 8$ , ¿cuánto tiempo estarían los procesadores ocupados en una hora de funcionamiento? ¿Y el sistema vacío?

### Problema 20.

Un departamento tiene contratado un servicio en la nube para llevar a cabo análisis bursátiles. Cuando un terminal genera una petición se queda esperando hasta recibir los resultados, antes de poder volver a enviar la siguiente. Se considera que el sistema dispone de capacidad para almacenar peticiones en espera, y no se pueden procesar análisis simultáneamente.

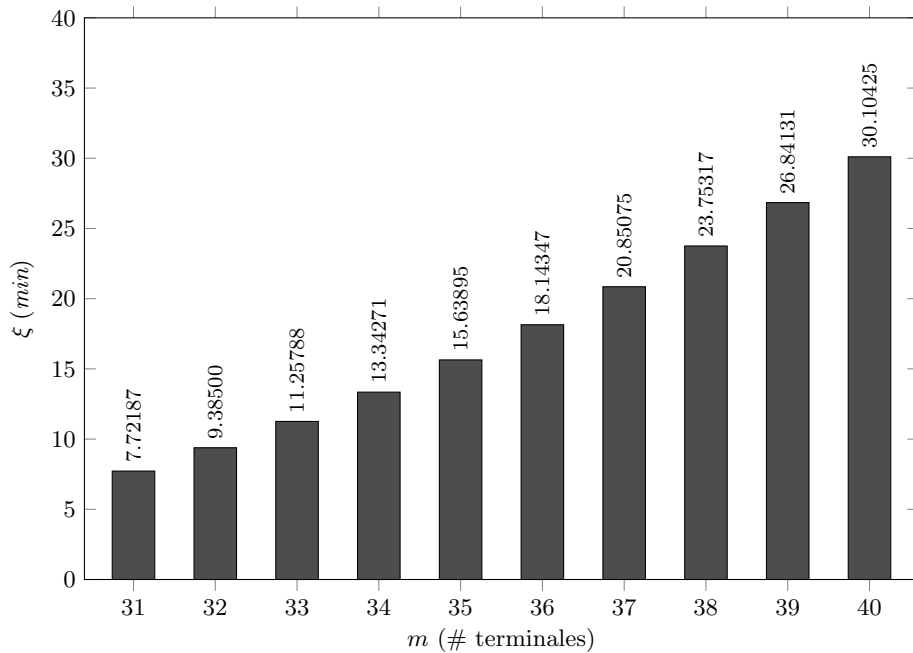
Para valorar su rendimiento y coste, la empresa lleva a cabo varios estudios. Inicialmente, monitoriza la evolución del tiempo que hay entre llamadas consecutivas al sistema, asumiendo que cada terminal (libre) genera 3 análisis por minuto, a medida que se incrementa el número de terminales conectados. Los resultados se recogen en la Figura (a). Posteriormente, teniendo en cuenta los usuarios que habitualmente harían uso del servicio, va incrementando la tasa de peticiones por fuente libre, y mide el tiempo total que transcurre desde que se envía un análisis hasta que se reciben los resultados, Figura (b).



- ¿Cuál sería el tiempo total que transcurre desde que se envía un trabajo hasta que se obtiene resultados cuando se conectan 4 terminales? ¿Cuánto tiempo estaría activo el procesador en una hora de observación?
- ¿Cuál sería el tráfico por fuente libre que se podría aceptar (para los tres valores de  $m = 6, 7, 8$ ) si se pretende que el tiempo de espera no supere los 5 segundos? ¿Cuánto tiempo estaría activo el procesador durante 1 hora, si se conectaran 6 terminales al sistema?
- Finalmente se conectan 7 terminales al sistema, y se admite que generen 6 peticiones por minuto (tasa por fuente libre). ¿Cuántas peticiones habría, en media, en el sistema de espera? ¿Cuál sería la tasa por fuente (real) que observaría un sistema de monitorización externo?

### Problema 21.

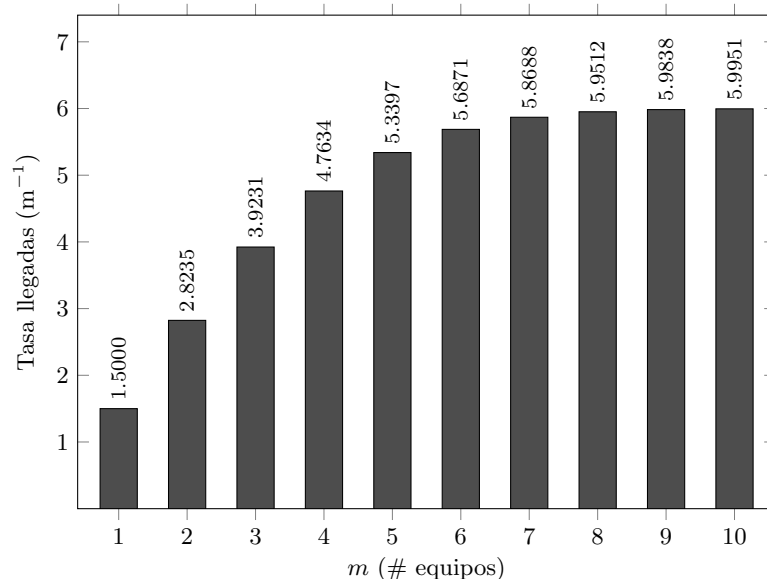
Una PYME decide contratar 10 líneas de salida para su centralita. Para evaluar su comportamiento, utiliza un módulo de gestión que es capaz de medir el tiempo en el que todas las líneas de salida están ocupadas simultáneamente. Así, se van conectando terminales a dicha centralita, y se registra dicho tiempo,  $\xi$ , en jornadas laborales de 8 horas, obteniendo la gráfica que se muestra en la Figura.



- Si se pretende que la probabilidad de pérdida sea inferior al 4%, ¿cuántos terminales podrían conectarse al sistema?
- Cuando se conectan 32 terminales, el módulo de gestión determina que se reciben (en media) 427.8137 llamadas durante una jornada laboral. Si se asume que la duración de una llamada es de 6 minutos, ¿cuál sería la tasa de llamadas por fuente libre?
- ¿Cuánto tiempo estarían las 10 líneas libres (de manera simultánea) en una jornada laboral, si se conectan 36 terminales a la centralita?
- ¿Cuál es el error (absoluto y relativo) que se cometería si se utilizara la Fórmula de ErlangB para calcular la probabilidad de pérdida, con  $m = 40$  terminales, asumiendo que el tráfico ofrecido se calcularía como  $m \cdot a$ , siendo  $a$  el tráfico por fuente libre.

**Problema 22.**

Los investigadores de un grupo de trabajo utilizan un servidor para hacer análisis. Cuando envían una petición, quedan a la espera de recibir los resultados correspondientes antes de enviar la siguiente. Se supone que el servidor cuenta con un único procesador, y memoria suficiente para mantener peticiones en espera. Para evaluar el comportamiento del sistema, se van conectando investigadores al servidor, y se monitoriza la tasa real de peticiones que llegan, obteniendo la gráfica que se muestra en la Figura.



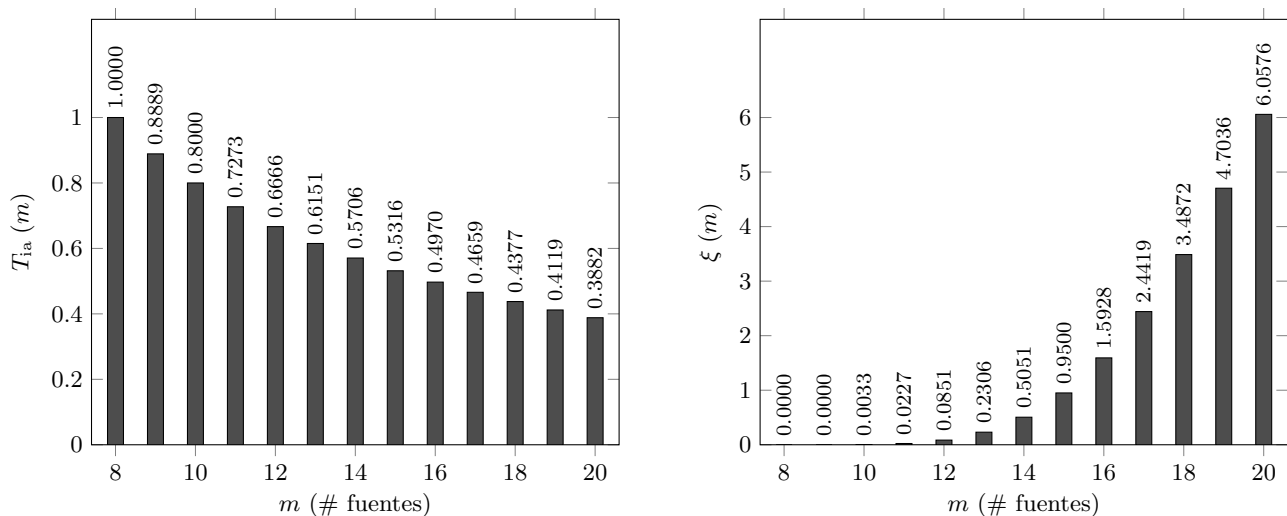
- Sabiendo que el tiempo medio de análisis es de 10 segundos, ¿cuál es la tasa por fuente libre?

- (b) ¿Cuántos terminales se podrían conectar, si se pretende que el tiempo de espera no supere los 20 segundos?
- (c) Si  $m = 3$ , ¿cuál es el tiempo medio de espera? ¿Cuánto tiempo estaría en reposo el procesador en una hora de observación? Comprobar la validez de este resultado, utilizando la cadena de Markov correspondiente.
- (d) Cuando  $m = 8$ , ¿cuánto tiempo estarían los 8 investigadores esperando a recibir resultados de manera simultánea en 1 hora de observación? ¿Cuál sería el número medio de análisis en el buffer de espera?

**Problema 23.**

Se pretende analizar el comportamiento de un sistema de análisis de grandes volúmenes de datos. Debido a la cantidad de memoria necesaria para mantener peticiones en espera se decide que no se habilitará un buffer de espera, por lo que se rechazarán análisis entrantes si todos los procesadores están ocupados.

Para evaluar el comportamiento del sistema se van incrementando el número de fuentes y se monitorizan dos parámetros: (1) tiempo entre llegadas consecutivas al sistema ( $T_{ia}$ ), y (2) tiempo en el que todos los procesadores están ocupados en una hora de observación ( $\xi$ ).

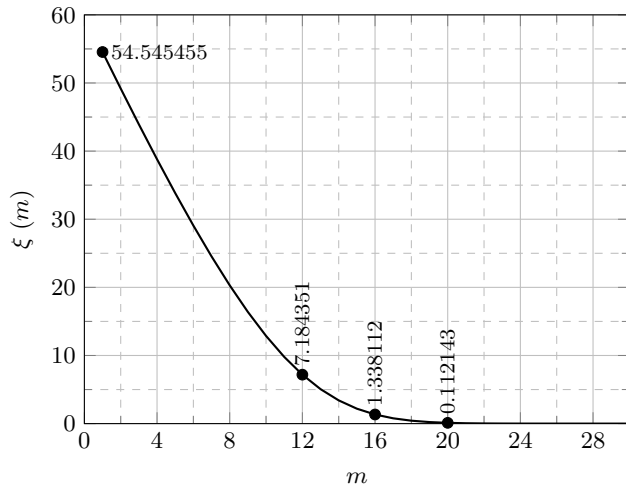


- (a) ¿Cuántos procesadores tiene el sistema? Si se sabe que el tiempo medio que tarda un procesador en finalizar un análisis es de 3 minutos, ¿cuántos trabajos envía cada fuente (libre) por hora?
- (b) ¿Cuál sería la probabilidad de pérdida si se conectaran 16 usuarios al sistema? Hacer el cálculo de dos maneras alternativas, para comprobar la validez del resultado.
- (c) ¿Cuánto tiempo estarían todos los procesadores parados, en una hora de observación, cuando se conectan 14 usuarios al sistema?

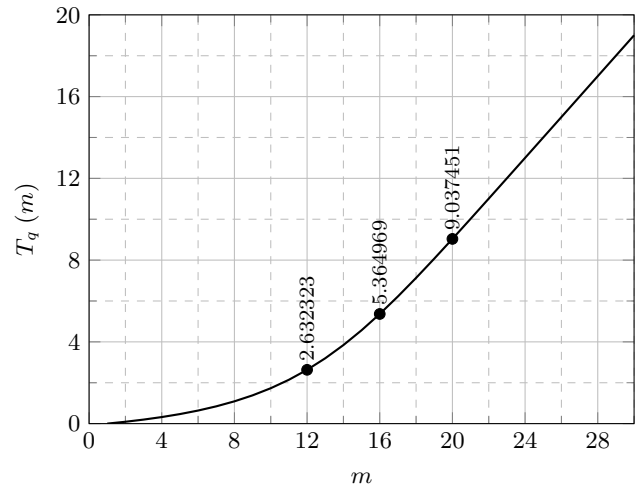
**Problema 24.**

Se pretende analizar el comportamiento de un sistema de transacción. Las fuentes no pueden generar nuevas peticiones si tienen una en curso. Se va incrementando el número de fuentes que se conectan al sistema, y se mide el tiempo que está el procesador vacío (en 1 hora de observación), así como el tiempo de espera por petición, obteniendo las gráficas que se muestran en la figura. Se sabe que la tasa por fuente libre ( $\alpha$ ) es 6 peticiones por hora.

- (a) Si se pretende que el tiempo total en el sistema (en espera y en el procesador) sea inferior a 8 minutos, ¿cuántas fuentes se podrían conectar al sistema?
- (b) ¿Cuántas peticiones habría en media en el buffer de espera cuando se conectan 12 terminales?
- (c) ¿Cuánto tiempo (en 1 hora de observación) estarían todas las fuentes simultáneamente esperando una respuesta, al conectarse 16 terminales?
- (d) ¿Qué tasa de llegadas se tendría que asumir si se quisiera utilizar un modelo M/M/1 para caracterizar el comportamiento del sistema para  $m = 20$  y se quisiera que el retardo total fuera el mismo? ¿Qué error se cometería en la ocupación del procesador en este caso?



(a) Tiempo de reposo del procesador



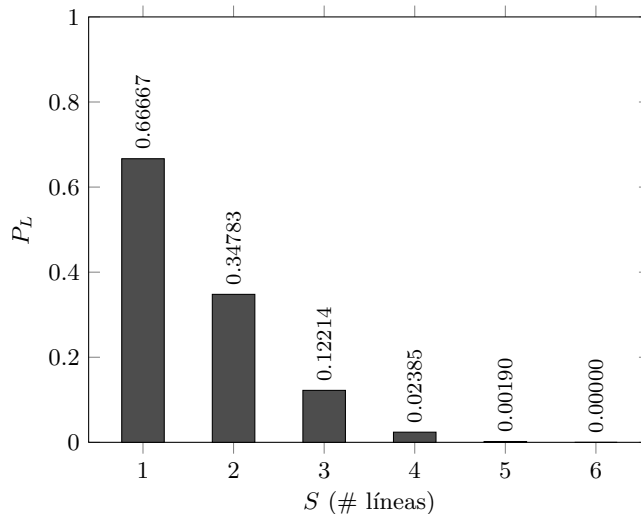
(b) Tiempo de espera por petición

**Problema 25.**

Se pretende analizar el comportamiento de la centralita para dar servicio al departamento de ventas de una empresa, que cuenta con 6 terminales. Se sabe que la duración media por llamada es de 2 minutos.

- (a) Si al habilitar una única línea de salida, se observara que las peticiones entrantes se pierden con una probabilidad  $\frac{1}{3}$ , ¿cuál sería la tasa de generación de llamadas por terminal libre?

Tras un cambio en la actividad comercial de la empresa, la tasa por fuente libre se estima en 12 llamadas por hora. En esas condiciones se va incrementando el número de líneas disponibles, y se mide la probabilidad de pérdida, obteniendo la figura que se muestra a continuación.



- (b) ¿Cuál sería el tráfico ofrecido a la centralita, si se utiliza el menor número de líneas posibles para garantizar una pérdida inferior al 3%? Hacer el cálculo de dos maneras diferentes.
- (c) ¿Cuántas líneas estarían ocupadas en media?

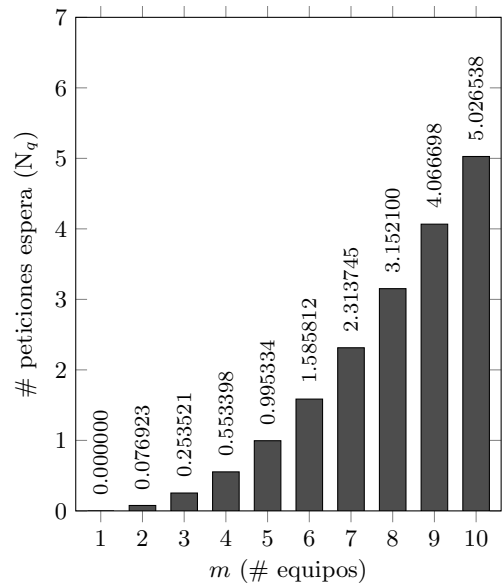
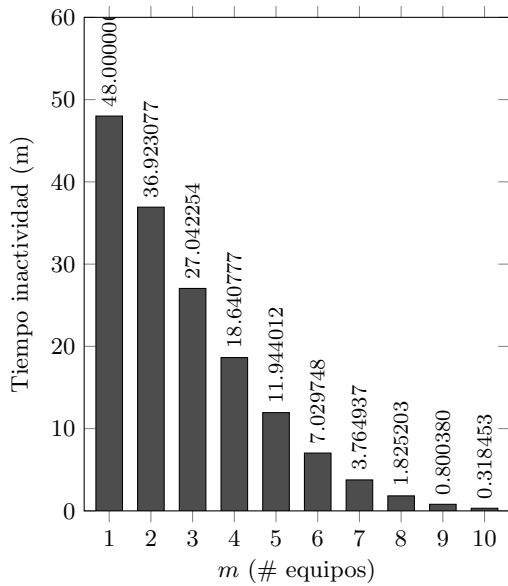
El sistema de gestión de red detecta la avería de un terminal, que deja de generar llamadas. Además muestra, en el cuadro de mando, la ocupación individual de todas las líneas.

- (d) ¿Cuánto tiempo estarían todas las líneas ocupadas de manera simultánea, en una hora de observación? Haced el cálculo de dos maneras diferentes.

**Problema 26.**

Considerar un sistema de transacción al que le llegan peticiones de varios terminales, que no pueden generar nuevas solicitudes hasta que las anteriores hayan concluido. Se supone que se dispone de capacidad para mantener peticiones en espera cuando el procesador está ocupado. El tiempo medio por análisis es  $T_s = 5 s$ .

Se van incorporando fuentes al sistema, y se registra el tiempo que el procesador permanece inactivo en una hora de observación, así como el número medio de peticiones en espera, generando las gráficas que se muestran a continuación.



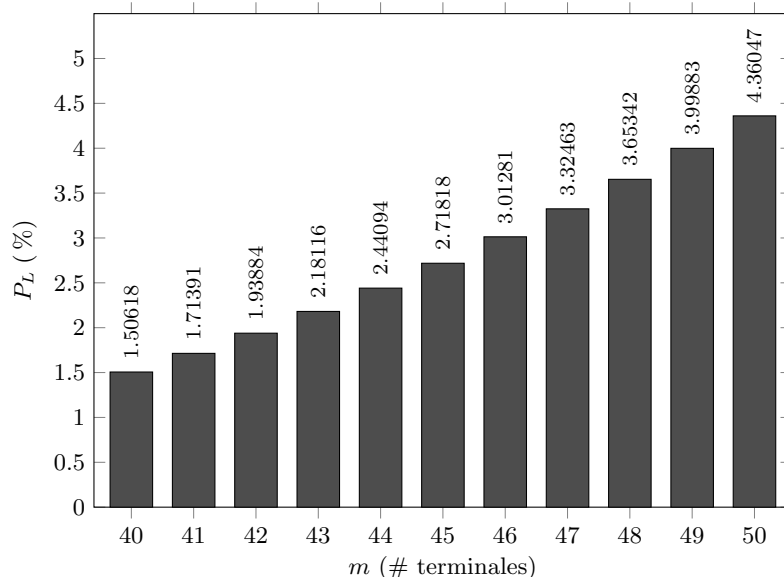
- (a) Si se pretende que el procesador no esté activo más del 85 % del tiempo, ¿cuántos terminales se podrían conectar al sistema?
- (b) ¿Cuál es la tasa de generación de peticiones por fuente libre? ¿Cuál sería la tasa real por terminal cuando  $m = 5$ ? Calcular este valor de dos maneras diferentes.
- (c) Calcular el retardo total cuando se conectan tres terminales al sistema.

Se plantea un cambio en el sistema, en el que la capacidad de procesado se repartiría utilizando técnicas de virtualización, de manera que cada terminal tendría una capacidad exclusiva para él. Se supone que el reparto es equitativo entre los  $m$  terminales, por lo que el tiempo de servicio, para un terminal, pasaría a ser  $T_s \cdot m$ .

- (d) ¿Cuál es el máximo número de terminales que se podrían conectar al sistema con esta modificación?
- (e) Si  $m = 3$ , ¿cuál sería el retardo total por petición con la nueva configuración? ¿Cuántas peticiones esperarían, en media, en el sistema modificado?

**Problema 27.**

Se despliega una pico-célula con 8 slots para dar servicio en un área determinada. Para dimensionar el sistema se van añadiendo usuarios a la misma, y se obtiene la probabilidad de pérdida, dando lugar a la gráfica que se muestra en la figura. Se sabe además que la duración media de una llamada es de 3 minutos.



- (a) ¿Cuántos usuarios se podrían conectar al sistema, si se pretende que la pérdida sea inferior al 2.5%? ¿Cuánto tiempo estarían los 8 slots ocupados simultáneamente en una hora de observación en ese caso?
- (b) Cuando se conectan 45 usuarios, se observa que se reciben, en media, 82.0209 llamadas en una hora. ¿Cuál es la tasa por fuente libre? ¿Cuánto tiempo estaría activo cada slot en dicha hora?
- (c) ¿Durante cuánto tiempo habría, al menos, 6 slots libres durante una hora de observación cuando se conectan 40 usuarios a la pico-célula?
- (d) ¿Cuál es el error (absoluto y relativo) que se cometería al utilizar la Fórmula de ErlangB para calcular la probabilidad de pérdida, con  $m = 40$  y 50 usuarios, asumiendo que el tráfico ofrecido se estimaría como  $m \cdot a$ , siendo  $a$  el tráfico por fuente libre? Comentar los resultados obtenidos.

**Problema 28.**

Una empresa utiliza un servicio en la nube para desplegar un *gemelo digital*. El funcionamiento se basa en un conjunto de elementos que envían análisis, y que deben esperar a recibir el resultado antes de enviar el siguiente. Se supone que hay capacidad suficiente para mantener análisis en espera. El tiempo medio de análisis (variable aleatoria exponencial negativa) es de 2 segundos.

Para analizar el comportamiento del sistema, la empresa va conectando fuentes (1,2,8) y una sonda establece el tiempo entre peticiones consecutivas que llegan al sistema (de cualquier fuente), obteniendo los datos que se recogen en la Figura (a). Además, la Figura (b) muestra la ocupación del sistema (número de peticiones), con su función densidad de probabilidad, cuando se conectan 4 fuentes.

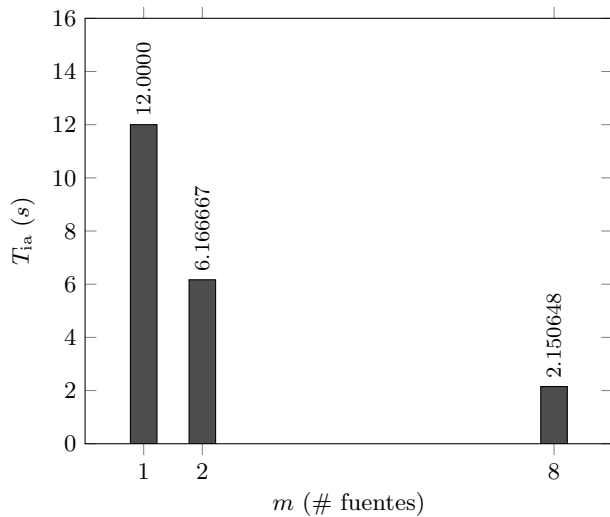


Figura (a)

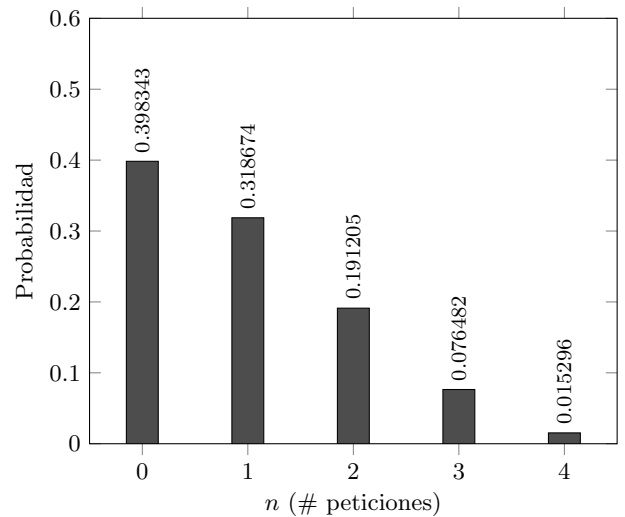


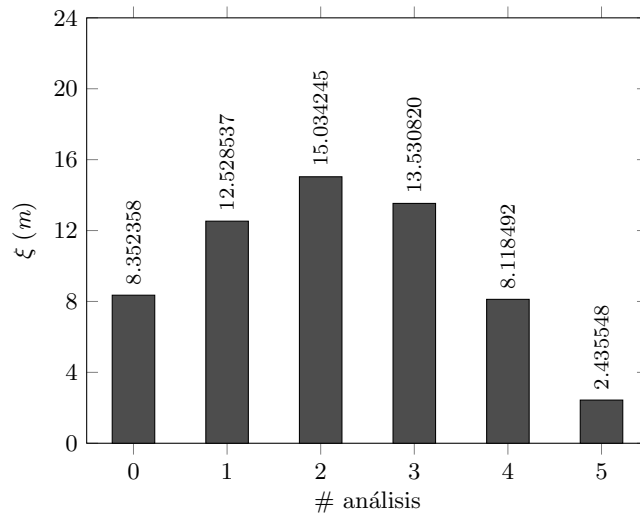
Figura (b)

- (a) ¿Cuánto tiempo estaría activo el procesador cuando se conectan 2 fuentes al sistema en una hora de observación? ¿Durante cuánto tiempo estarían todas las fuentes esperando (de manera simultánea) el resultado de un análisis?
- (b) ¿Cuál es el retardo total cuando se conectan 8 fuentes? ¿Cuántas peticiones habría, en media, en el sistema?
- (c) Al conectarse 4 fuentes, ¿cuál habría sido el tiempo entre llegadas consecutivas al sistema? Se pide hacer el cálculo de dos maneras diferentes, para comprobar su validez. ¿Cual sería el retardo total en este caso?
- (d) ¿Cuál es el número medido de fuentes libres cuando se conectan 4 elementos al *gemelo digital*?

**Problema 29.**

Considerar un sistema con un procesador para realizar análisis, al que le llegan peticiones de  $m$  terminales, que no pueden generar nuevos análisis hasta que los anteriores hayan concluido. Se supone que se dispone de capacidad para mantener peticiones en espera cuando el procesador está ocupado. El tiempo medio por análisis es  $T_s = 3 s$ .

Se observa el sistema durante una hora, para establecer la ocupación del sistema. La figura representa el tiempo acumulado para las diferentes posibles estados.



- Si el precio de uso del procesador es de 3.87 céntimos por minuto, y el del buffer de espera de 1.31 céntimos por minuto (por cada posición ocupada), ¿cuál es el precio de uso del sistema por día, si se supone que está activo 16 horas?
- ¿Cuál es el tiempo medio de espera? ¿Y la tasa por fuente libre?
- ¿Cuánto tiempo habría entre peticiones de un mismo terminal al sistema? Realizar el cálculo de dos maneras diferentes.

### Problema 30.

En un centro de investigación hay varios investigadores que tienen que llevar a cabo análisis en una réplica digital para controlar el comportamiento de cierta maquinaria. Debido a la necesidad de que los resultados lleguen con un retardo mínimo, se decide que no puedan esperar. Cuando un investigador envía una petición, no puede generar más hasta que la anterior haya finalizado.

Se deciden adquirir procesadores en modalidad *SaaS*, de manera que el tiempo medio necesario para completar un análisis es de 10 s. Para dimensionar el sistema, se lleva a cabo una simulación en la que se va incrementando el número de investigadores que pueden utilizar el sistema, y se establece la probabilidad de pérdida, para varias configuraciones posibles, generando la tabla que se muestra a continuación.

Proc.	$m=41$	$m=42$	$m=43$	$m=44$	$m=45$	$m=46$	$m=47$	$m=48$	$m=49$	$m=50$
6	0.0909	0.0976	0.1044	0.1114	0.1184	0.1256	0.1328	0.1401	0.1474	0.1548
7	0.0423	0.0465	0.0510	0.0556	0.0604	0.0654	0.0705	0.0758	0.0813	0.0868
8	0.0171	0.0194	0.0218	0.0244	0.0272	0.0301	0.0332	0.0365	0.0400	0.0436
9	0.0061	0.0071	0.0082	0.0094	0.0108	0.0122	0.0138	0.0156	0.0175	0.0195
10	0.0019	0.0023	0.0027	0.0032	0.0038	0.0044	0.0051	0.0059	0.0068	0.0077

Proc.	$m=51$	$m=52$	$m=53$	$m=54$	$m=55$	$m=56$	$m=57$	$m=58$	$m=59$	$m=60$
6	0.1622	0.1696	0.1771	0.1845	0.1919	0.1993	0.2067	0.2140	0.2213	0.2285
7	0.0925	0.0983	0.1042	0.1102	0.1163	0.1224	0.1286	0.1349	0.1412	0.1475
8	0.0474	0.0513	0.0554	0.0596	0.0639	0.0684	0.0730	0.0777	0.0826	0.0875
9	0.0216	0.0239	0.0264	0.0289	0.0316	0.0345	0.0375	0.0406	0.0439	0.0472
10	0.0088	0.0099	0.0112	0.0126	0.0140	0.0156	0.0173	0.0191	0.0210	0.0231

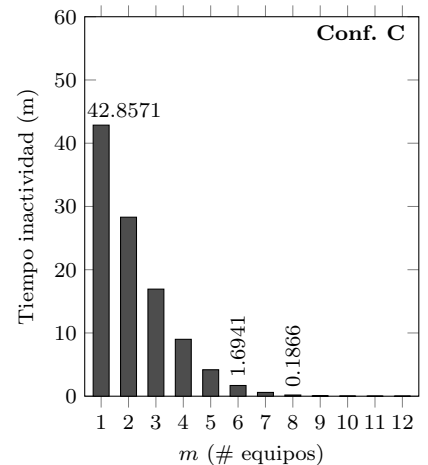
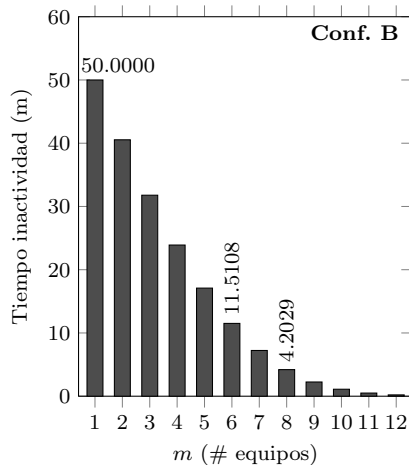
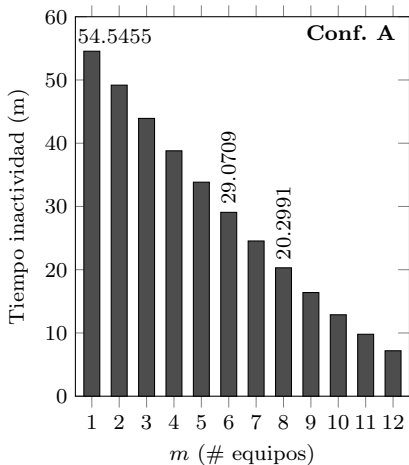
- ¿Cuántos procesadores serían necesarios adquirir, asumiendo que el número de investigadores es  $m = 50$ , si se pretende que la pérdida sea inferior al 2%? ¿Cuál sería el número de investigadores que podrían utilizar el sistema, si se contrataran 8 procesadores?
- La empresa decide adquirir 10 procesadores. ¿Cuál sería la probabilidad de pérdida cuando utilizan el sistema  $m = 50$  investigadores? ¿Durante cuánto tiempo estarían todos los recursos ocupados simultáneamente, en una hora de observación? ¿Y si hubiera  $m = 58$  investigadores utilizando el sistema?
- Con la configuración del apartado anterior, y  $m = 55$  investigadores utilizando el sistema, se observan 30.0383 peticiones (en media) por minuto. ¿Cuál es la tasa por fuente libre? ¿Cuál sería la utilización de cada procesador en una hora?
- Con las condiciones del apartado anterior, ¿cuánto tiempo habría, al menos, 8 recursos libres en una hora de observación?



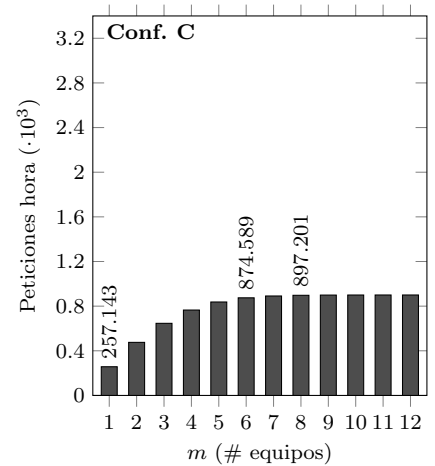
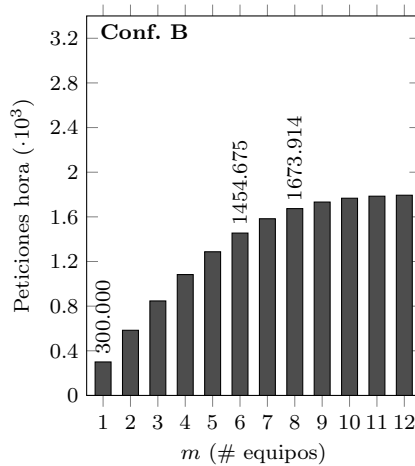
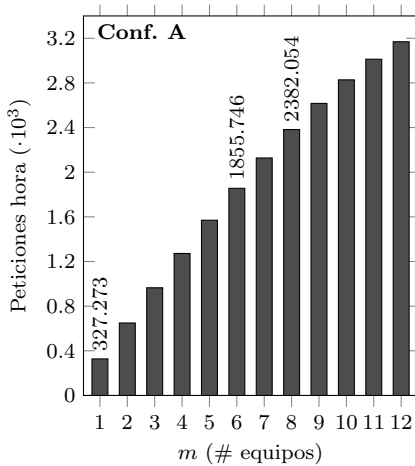
**Problema 31.**

Un laboratorio de investigación decide utilizar una instancia de *aws* para llevar a cabo análisis utilizando técnicas de inteligencia artificial. Cuando se lanza una petición, hay que esperar a recibir sus resultados para enviar la siguiente. El sistema se dimensiona con un único procesador, y se contrata capacidad suficiente para mantener peticiones en espera.

Se ofrecen tres capacidades diferentes para el procesador, y se estima que cada investigador (*fente libre*) genera 6 análisis por minuto. Para establecer la configuración adecuada del sistema, se hacen pruebas con las tres capacidades, y se van añadiendo investigadores (fuentes) al mismo. Se mide el tiempo (en minutos) que el procesador está inactivo en una hora de observación, así como las peticiones recibidas en el mismo periodo, obteniendo las gráficas que se muestran a continuación.



Tiempo de inactividad del procesador en una hora (minutos)



Análisis recibidos en una hora

- ¿Cuál es el tiempo de procesado de cada configuración?
- Si se decide contratar la configuración intermedia, ¿cuál sería el tiempo medio de espera cuando se conectan 8 investigadores al sistema? ¿Cuál sería dicho tiempo para la configuración más rápida?
- El precio del servicio, para la configuración intermedia, es de 3.58 céntimos por minuto de utilización del procesador, y 6.1 céntimos por minuto de utilización del sistema de espera. ¿Cuál sería el precio de una hora de operación del sistema, en esta configuración, con 8 investigadores?
- En la configuración lenta, con 6 investigadores, ¿cuál es el número medio de investigadores que están esperando a recibir los resultados de un análisis? ¿Durante cuántos minutos estarían todos los investigadores esperando de manera simultánea?

Tema 5 - Sistemas con fuentes finitas  
Soluciones de la hoja de problemas

**Problema 1.**

- (a)  $p_0 = 0.51, p_1 = 0.32, p_2 = 0.14$   
 $p_3 = 0.03$
- (b)  $p_w = 0.49, N_T = 0.69$   
 $N_Q = 0.196, T_Q = 16.955 \text{ ms}$   
 $\rho = 0.492$
- (c)  $p_w = 0.64, N_T = 1.78$   
 $N_Q = 1.14, T_Q = 75.85 \text{ ms}$   
 $\rho = 0.64$

**Problema 2.**

- (a)  $T_S = 1.28s, a = 0.16$
- (b)  $p_0 = 0.3775, p_w = 0.6225,$   
 $N_T = 1.11, N_Q = 0.487,$   
 $T_T = 2.28s, T_Q = 1s$

**Problema 3.**

- (a)  $T_S = 6.4s, \alpha = 3.75p/m, a = 0.4$
- (b)  $p_0 = 0.07, p_w = 0.93$   
 $N_T = 2.675, N_Q = 1.745$   
 $T_T = 18.41s, T_Q = 12s$

**Problema 4.**

- (a) 4 Fuentes  
PB = 0.0488, PL = 0.027  
 $\lambda = 8.02 \text{ ll/h}$   
5 Fuentes  
PB = 0.0735, PL = 0.0488  
 $\lambda = 10.04 \text{ ll/h}$

**Problema 5.**

- (a) 2.409 min.  
(b) 3.4465 ll/h.

**Problema 6.**

- (a) 0.33 min (19.83 s).  
(b)  $T_0 = 100 \text{ s}, a = 0.2$

**Problema 7.**

- (a) 4 líneas:  $\alpha = 1.66 \text{ ll/h}$   
5 líneas:  $\alpha = 2.52 \text{ ll/h}$   
6 líneas:  $\alpha = 3.6 \text{ ll/h}$
- (b)  $\tilde{\alpha}_0 \approx 1.82 \text{ ll/h}$

**Problema 8.**

- (a) 10 teléfonos  
26.4 m
- (b)  $T_{ia} = 11.92 \text{ m}$   
 $\lambda = 50.34 \text{ llamadas/hora}$

**Problema 9.**

- (a) 16 terminales  
(b)  $\alpha = 1 \text{ llegadas/h}$   
(c)  $\tilde{\alpha} = 0.924 \text{ llegadas/h}$

**Problema 10.**

- (a) 4 terminales
- (b)  $\alpha = 6$  trabajos/h
- (c)  $\tilde{\alpha} = 4.5$  trabajos/h

**Problema 11.**

- (a) 5 líneas  
 $a = 0.155, 0.145, 0.135$  (Erlangs)
- (b) 2.0149 Erlangs  
3.224 horas
- (c)  $a = 0.145$  Erlangs  
 $\tilde{\alpha} = 3.822 \text{ h}^{-1}$

**Problema 12.**

- (a)  $a = 50$  mErlangs  
0.0296 trabajos
- (b) 0.38, 0.76, 1.14, 1.51, 1.89 (horas)

**Problema 13.**

- (a)  $a = 0.203$  Erlangs
- (b) Cada línea: 3.88 horas  
Las 6 líneas ocupadas: 21.9 min

**Problema 14.**

- (a) 5 terminales  
15.413 horas
- (b)  $\alpha = 1.5 \text{ m}^{-1}$
- (c)  $\tilde{\alpha} = 0.494 \text{ m}^{-1}$

**Problema 15.**

- (a)  $\phi = 2$
- (b)  $\alpha = 4.8 \text{ h}^{-1}$
- (c)  $P_L = 0.408$
- (d)  $\approx 5 \text{ h}$

**Problema 16.**

- (a) 6 equipos
- (b)  $\tilde{\alpha} = 3.678 \text{ h}^{-1}$   
 $\alpha = 4.5 \text{ h}^{-1}$
- (c)
- (d)  $T_w = 1.4565 \text{ m}$   
 $N_w = 0.4337$  trabajos

**Problema 17.**

- (a) 5 líneas. No.  $a = 0.3$
- (b) 21.6 minutos
- (c)  $\alpha \approx 0.1 \text{ m}^{-1}$

**Problema 18.**

- (a)  $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$
- (b) 19.46 minutos
- (c) 3.35 peticiones. 55.8 minutos

**Problema 19.**

- (a) 4 procesadores.
- (b) 4 minutos
- (c) 8.7%
- (d) 7.65 y 4.27 minutos.

**Problema 20.**

- (a) 2.6413 s, 21.2 m
- (b)  $a = \{0.367, 0.25, 0.195\}$ ,  
57.81 m
- (c) 1.75 peticiones,  $0.4375 \text{ s}^{-1}$

**Problema 21.**

- (a) 37 terminales
- (b)  $2 \text{ h}^{-1}$
- (c)  $6.3 \cdot 10^{-3} \text{ min}$
- (d) 0.06578, 117.6 %

**Problema 22.**

- (a)  $2 \text{ m}^{-1}$
- (b) 5 terminales
- (c) 5.8821 seg, 20.77 min
- (d) 3 min, 4.0325 peticiones

**Problema 23.**

- (a) 10 procesadores, 12 trabajos/hora
- (b) 1.6 %
- (c) 0.0835 min

**Problema 24.**

- (a) 17 fuentes
- (b) 2:31713 peticiones
- (c) 0.168 s
- (d)  $0.9 \text{ m}^{-1}$ ,  $\epsilon_{\text{rel}} = 9.82 \cdot 10^{-2}$

**Problema 25.**

- (a)  $3 \text{ h}^{-1}$
- (b) 1.73 Erlangs
- (c) 1.685 líneas
- (d) 1.43 min

**Problema 26.**

- (a) 5 terminales
- (b)  $\alpha = 3 \text{ m}^{-1}$ ,  $\tilde{\alpha} = 1.922 \text{ m}^{-1}$
- (c) 7.3068 s
- (d) 4 terminales
- (e) 15 s

**Problema 27.**

- (a) 44 usuarios, 1.63 min
- (b)  $\alpha = 2 \text{ h}^{-1}$ , 30 min
- (c) 17.116 min
- (d)  $m=40$ :  $\delta_{\text{abs}} = 0.01536$ ,  $\delta_{\text{rel}} = 102 \%$   
 $m=50$ :  $\delta_{\text{abs}} = 0.026445$ ,  $\delta_{\text{rel}} = 60.65 \%$

**Problema 28.**

- (a) 19.46 m, 3.24 m
- (b) 7.2052 s, 3.35 pet.
- (c) 3.3241 s, 3.297 s
- (d) 3.008

**Problema 29.**

- (a) 48 €
- (b) 4.4263 s,  $6 \text{ m}^{-1}$
- (c) 17.43 s

**Problema 30.**

- (a) 9 proc., 42 inv.
- (b) 0.0077, 31.68 s, 75.6 s
- (c)  $0.6 \text{ m}^{-1}$ , 29.6 m
- (d) 6.83 m

**Problema 31.**

- (a) 1, 2, 4 s
- (b) 5.205 s, 1.09 s
- (c) 5 €
- (d) 3.571 inv., 5 m