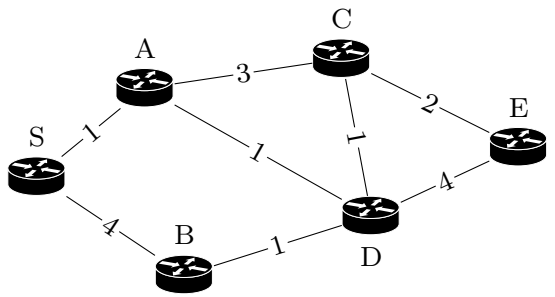
E.T.S.I.I.T - Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Redes de Comunicaciones

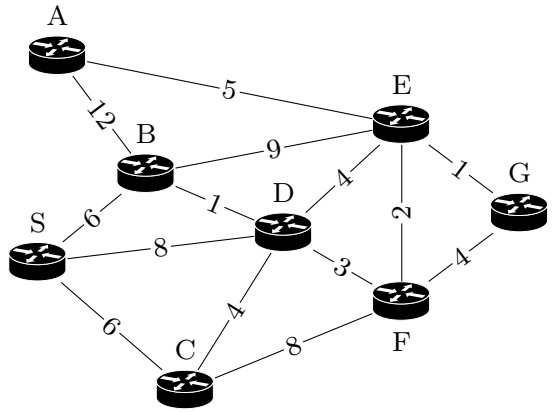
Curso 2023/2024

Tema 2 - Algoritmos en redes
Hoja de problemas

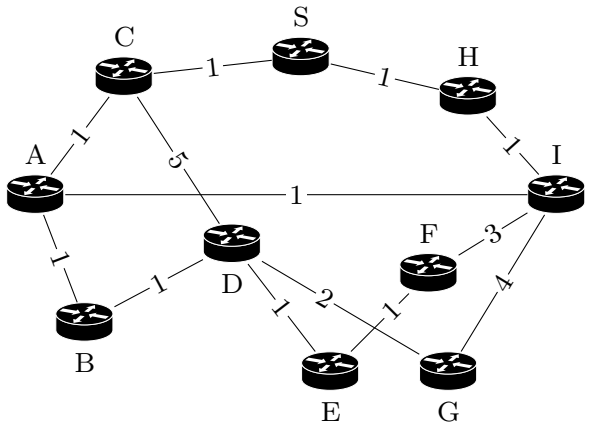
Problema 1. Encontrar, aplicando los algoritmos de *Dijkstra* y *Bellman-Ford*, los caminos de coste mínimo entre S y el resto de nodos en las siguientes topologías de red.



(a)



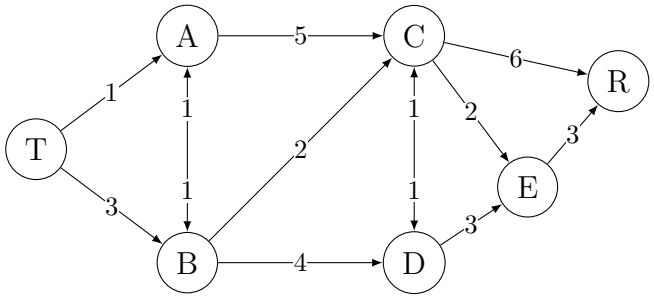
(b)



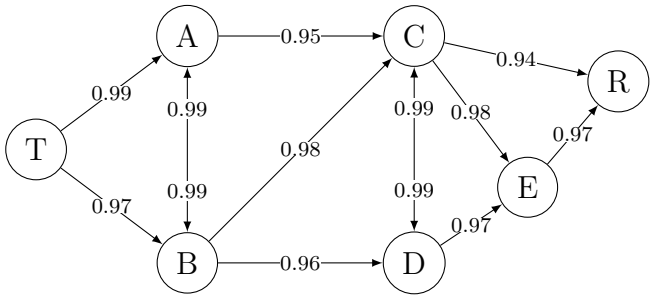
(c)

Problema 2. Aplicar el algoritmo de *Floyd-Warshall* a la primera red del problema anterior.

Problema 3. Encontrar, usando los algoritmos de *Dijkstra* y *Bellman-Ford*, el camino de coste mínimo entre los nodos T y R de la figura, así como el valor de dicho coste.

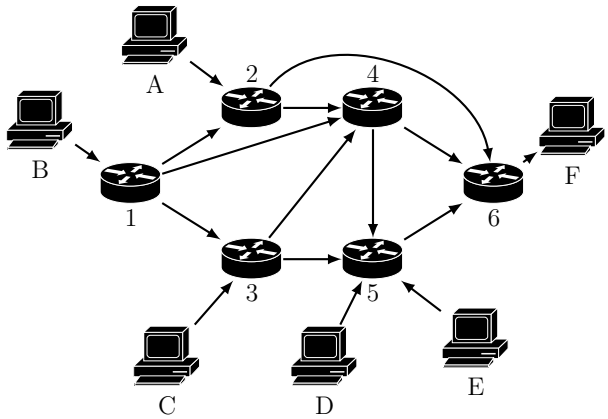


Problema 4. En la red de la figura adjunta se ha indicado en cada enlace la probabilidad de que esté operativo (de que no *fallen*).



Teniendo en cuenta que los fallos en enlaces diferentes son independientes entre sí se pide encontrar, usando el algoritmo de *Dijkstra*, la ruta de máxima fiabilidad entre los nodos T y R.

Problema 5. En la figura se muestra una red de conmutación de paquetes formada por 6 nodos. La capacidad entre las estaciones i y j queda determinada por el elemento C_{ij} de la matriz de capacidades (en *bps*).



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 3600 & 1800 & 900 & - & - \\ - & - & - & 1200 & - & 720 \\ - & - & - & 3600 & 3600 & - \\ - & - & - & - & 900 & 1800 \\ - & - & - & - & - & 1200 \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Asimismo, el coste de transmisión de una paquetes entre nodos adyacentes vale $d_{ij} = \dfrac{3600}{C_{ij}}$.

Esta red utiliza un algoritmo de encaminamiento múltiple, para lo cual cada nodo i debe calcular la probabilidad con la que transmitirá un paquetes por el enlace que conduce al nodo j. Dicha probabilidad es inversamente proporcional al coste de dicho enlace. Los buffers donde se almacenan los paquetes antes de ser transmitidos por el enlace de salida pueden suponerse infinitos.

(a) ¿Cuál es el camino de coste mínimo para un paquete procedente del terminal B dirigido al terminal F?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete originado en B elija dicho camino?
(c) Si los terminales A, B, C, D, E generan paquetes destinados a F según una tasa $\lambda_i = 0.5$ pkt/s, ¿cuál es la tasa de dichos paquetes que circula por el enlace que va desde el nodo 4 hasta el 6?

Problema 6. Se tiene la siguiente matriz de costes o distancias.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 1 & \infty & 5 \\ 3 & \infty & 0 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

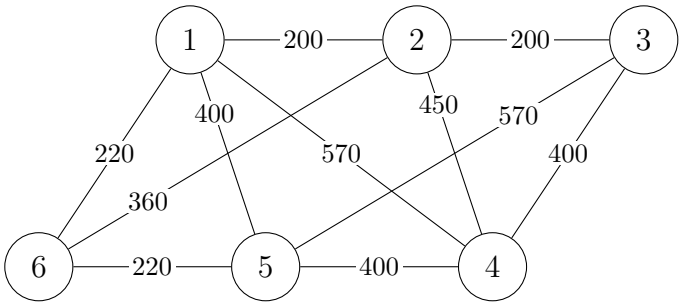
(a) Dibujar la topología de la red definida por la matriz C de rutas correspondiente.
(b) Partiendo de C y R, calcular y escribir las matrices resultantes en cada iteración al aplicar el algoritmo de *Floyd-Warshall*; muéstrense claramente los cambios que se dan en cada una de dichas iteraciones. Justificar la simetría o asimetría de las matrices C y R finales.
(c) Utilizando las matrices C y R resultantes de aplicar *Floyd-Warshall*, desglosar y justificar la ruta para ir del nodo 5 al nodo 2, indicando los nodos intermedios y los costes parciales de dicha ruta.
(d) Aplicando el algoritmo de mínimo coste de *Dijkstra*, encontrar las rutas de coste mínimo entre el nodo 3 y el resto de nodos de la red.

Problema 7. Dada la matriz de costes **C** que define la topología de interconexión de una red de 5 nodos, y suponiendo que el tráfico dirigido entre los nodos i y j queda expresado a través de la matriz $\Gamma = [\gamma_{ij}]$, se pide resolver las siguientes cuestiones de manera razonada.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 4 & \infty & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 5 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} - & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & - & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & - & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & - & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

(a) Determinar la matriz de encaminamiento de menor coste (con menor número de saltos), utilizando para ello el algoritmo de *Floyd-Warshall*.
(b) Calcular el número medio de enlaces que atraviesa un paquete en esta red.

Problema 8. En la figura se muestra la topología de una red de conmutación de paquetes y la distancia física de los enlaces expresada en Km.



(a) Aplicar el algoritmo de *Floyd-Warshall* para encontrar las rutas que proporcionan el camino de menor longitud entre los nodos.

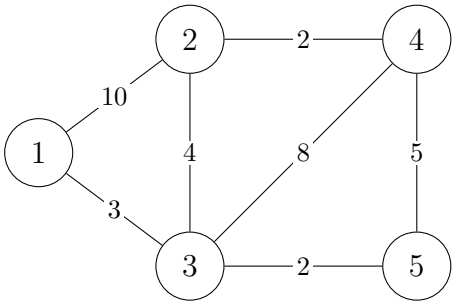
Supóngase que la población asociada a cada nodo de la red viene dada por la siguiente tabla.

Nodo	1	2	3	4	5	6
Población	0.5	1.5	2	2.5	1	1.5

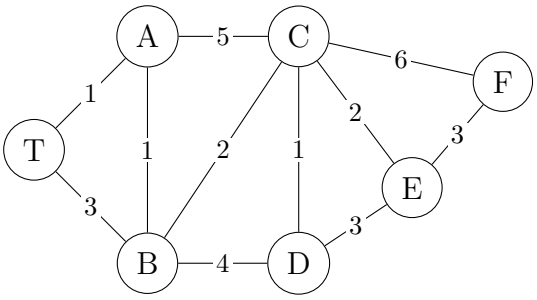
(b) Estimar el tráfico (en paquetes/segundo) entre cada par de nodos utilizando una ley proporcional a la población de ambos nodos e inversamente proporcional a la distancia física que deben recorrer los paquetes. Utilizar para ello un factor de proporcionalidad igual a 1000.
(c) Utilizando el encaminamiento obtenido en el apartado (a) y el tráfico estimado en (b), calcular el tráfico que circula por cada enlace.
(d) Obtener el número medio de enlaces que atraviesa un paquete genérico de la red.

Problema 9. Dadas las dos topologías de red que se adjuntan, se pide resolver las siguientes cuestiones.

(a) Aplicar el algoritmo de *Dijkstra* a la red de la figura (a), para encontrar las rutas de coste mínimo entre 1 y el resto de los nodos de la red.
(b) Aplicar el algoritmo de *Floyd-Warshall* a la red de la figura (a), para determinar las rutas de coste mínimo entre cada par de nodos.
(c) Aplicar el algoritmo de *Bellman-Ford* a la red de la figura (b), para obtener las rutas de coste mínimo entre T y el resto de nodos de la red.



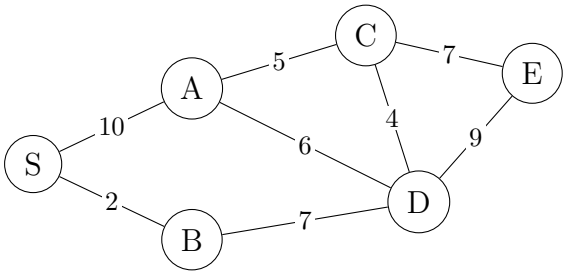
(a)



(b)

En la red de la figura se representa la capacidad de cada uno de los enlaces.

(d) ¿Qué modificaciones habría que hacer en el pseudocódigo del algoritmo de *Dijkstra* para poder encaminar en base a la capacidad (*encaminamiento cuello de botella*)?
(e) Aplicar dicho algoritmo para encontrar las rutas con mayor capacidad *cuello de botella* entre S y el resto de nodos.

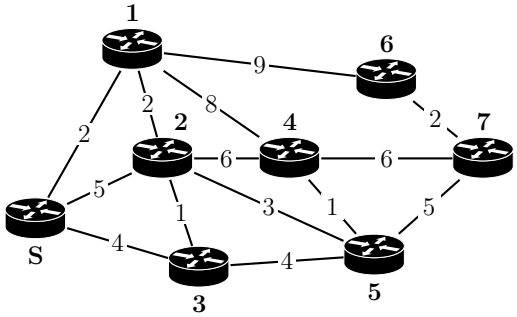


INITIALIZATION
1. d(S) = 0; Q = {∅}
2. for all v in N but S
3. d(v) = ∞
4. Q = N

MAIN LOOP
5. while Q ≠ ∅
6. u vertex in Q with min{d(v)}
7. delete u from Q
8. for all v adjacent to u
9. if d(v) > d(u) + c(u,v)
10. d(v) = d(u)+c(u,v)
11. prev(v) = u

Algoritmo de Dijkstra

Problema 10. Tras varios años de explotación, la configuración de la red de comunicaciones de una compañía es la que se muestra en la figura, donde los costes por enlace se han estimado en función de diferentes parámetros: distancia, amortización de la inversión necesaria, etc. El nodo central S manda información al resto, según la matriz de tráfico que aparece junto a la topología de red.



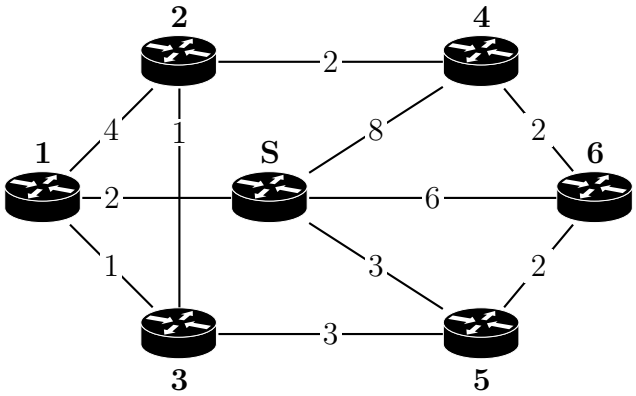
$$\Lambda \text{ (pkt/s)} = \begin{bmatrix} \overset{1}{2} & \overset{2}{1} & \overset{3}{4} & \overset{4}{2} & \overset{5}{0.5} & \overset{6}{1} & \overset{7}{1.5} \end{bmatrix}$$

(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo entre S y el resto de nodos de la red.

(b) ¿Cuál es el número medio de enlaces que un paquete tiene que atravesar (en promedio)?

(c) Si se asumiera que la información a enviar es la misma para todos los destinos - cada paquete tiene que llegar a todos los nodos de la red, ¿cómo se podría resolver el problema para garantizar un coste global mínimo? ¿Qué algoritmo se podría utilizar?

Problema 11. Considerar la red de la figura, en la que los costes se han determinado en base a ciertos criterios de mérito.



(a) Representar el grafo correspondiente, utilizando tanto una lista como una matriz de adyacencia.
Numerar el nodo S como 0 *en este apartado.*
En la lista de adyacencia, indicar el coste por encima de las flechas correspondientes.

(b) Encontrar la ruta de menor coste entre S y el resto de nodos, aplicando el algoritmo de *Bellman-Ford*.

Se utiliza dicha red para que el nodo S envíe datos a todas las sedes, según la matriz de tráfico que se indica.

$$\Lambda \text{ (pkt/s)} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c) ¿Cuál es el número medio de enlaces que un paquete tiene que atravesar?

Problema 12. Dados los dos grafos que se adjuntan, se pide resolver las siguientes cuestiones.

(a) Respecto al grafo (a) ¿se trata de un grafo dirigido o no dirigido? Aplicar el algoritmo de *Dijkstra* sobre el mismo para encontrar las rutas de coste mínimo entre 1 y el resto de los nodos.

(b) Aplicar el algoritmo de *Floyd-Wharsall* al grafo (b), para obtener las rutas de coste mínimo entre todos los posibles pares origen/destino. Escribir todas aquellas que tengan como origen el nodo 1. ¿Cuál es su número medio de enlaces?

$S \xrightarrow{6} A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{5} C \rightarrow null$

$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} E \rightarrow null$

$B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{8} E \xrightarrow{4} F \rightarrow null$

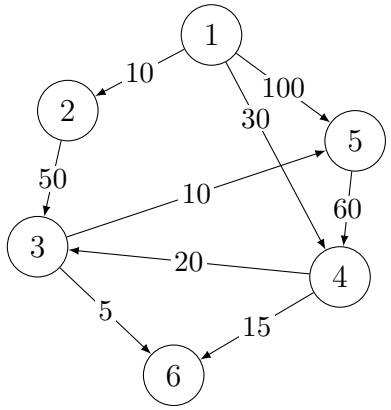
$C \xrightarrow{9} F \rightarrow null$

$D \xrightarrow{8} E \rightarrow null$

$E \rightarrow null$

$F \xrightarrow{6} D \xrightarrow{5} E \rightarrow null$

Grafo (a)

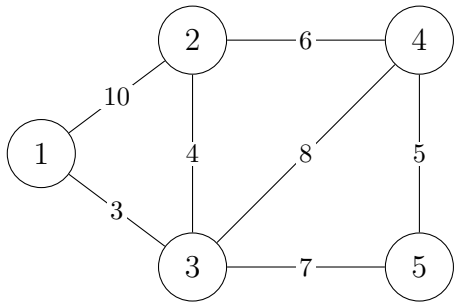


Grafo (b)

En la red de la figura se representa la capacidad de cada uno de los enlaces de una red.

(c) ¿Qué modificaciones habría que hacer en el pseudocódigo del algoritmo de *Floyd-Wharsall* para poder encaminar en base a la capacidad (*encaminamiento cuello de botella*)?

(d) Aplicar dicho algoritmo para encontrar todas las rutas con mayor capacidad *cuello de botella*. ¿Qué rutas utilizaría el nodo 1 para comunicarse con todos los posibles destinos?



INITIALIZATION

```
for all (u,v) in NxN
    d(u,v) = ∞
    pred(u,v) = NIL
for all nodes u in N
    d(u,u) = 0
for each (u,v) in E
    d(u,v) = c(u,v)
    pred(u,v) = u
```

MAIN LOOP

```
for k = 1 to N
    for u = 1 to N
        for v = 1 to N
            if d(u,v) > d(u,k) + d(k,v)
                d(u,v) = d(u,k) + d(k,v)
                pred(u,v) = pred(k,v)
```

Algoritmo de Floyd-Wharsall

Problema 13. Una empresa decide centralizar los servicios de *hosting* en una de sus sedes. Para comunicarse con el resto de oficinas el departamento de comunicaciones se plantea desplegar una red, para lo que estima los costes que aparecen en la matriz adjunta.

(a) Encontrar, aplicando el algoritmo de *Floyd-Warshall*, las rutas que debería utilizar S (nodo central) para comunicarse con todas las sedes. Si se sigue asumiendo que la tasa de generación de paquetes es la misma para todas las oficinas, ¿cuál es el número medio de enlaces que necesita un paquete cualquiera?

Tras varios años de explotación, la empresa decide abrir varias sedes en otras localizaciones. Teniendo en cuenta varios factores, establece un coste por enlace, como se puede ver en la matriz de adyacencia que se adjunta.

(b) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo entre S y el resto de nodos de la red. ¿Cuál es el número medio de saltos necesarios para alcanzar el destino para un paquete cualquiera, si la tasa de generación es la misma para todas las sedes?

(c) La empresa se plantea maximizar la fiabilidad de las comunicaciones, para lo que estima, tras un periodo de monitorización, la fiabilidad de cada uno de los enlaces (probabilidad de que un paquete se transmita correctamente), como se puede ver en la matriz que se muestra. ¿Cómo se podría aplicar el algoritmo de *Dijkstra* en esta situación si la intención es la de encontrar las rutas de mayor fiabilidad?
Nota: Si $p \approx 0$, $\ln(1-p) \approx -p$

Origen \ Destino	**S**	**1**	**2**	**3**
S	-	1	9	7
1	1	-	2	5
2	9	2	-	2
3	7	5	2	-

Coste de los enlaces para resolver el apartado (a)

Origen \ Destino	**S**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
S	-	1	9	7	10	∞	4	∞
1	1	-	2	5	∞	∞	2	∞
2	9	2	-	2	7	∞	∞	∞
3	7	5	2	-	∞	∞	∞	∞
4	10	∞	7	∞	-	4	6	∞
5	∞	∞	∞	∞	4	-	2	1
6	4	2	∞	∞	6	2	-	4
7	∞	∞	∞	∞	∞	1	4	-

Coste de los enlaces para resolver el apartado (b)

INITIALIZATION

```
d(S) = 0; Q = {∅}
for all v in N but S
    d(v) = ∞
Q = N
```

MAIN LOOP

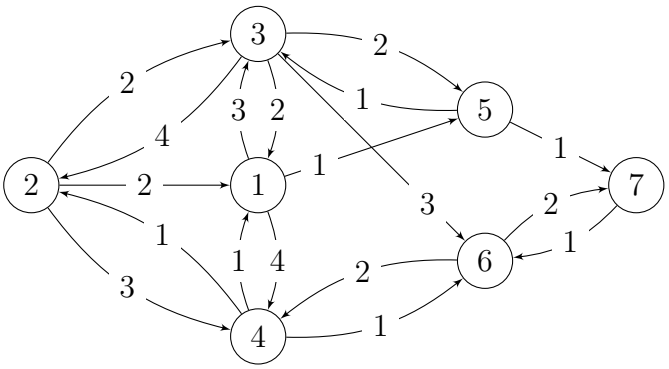
```
while Q ≠ ∅
    u vertex in Q with min{d(v)}
    delete u from Q
    for all v adjacent to u
        if d(v) > d(u) + c(u,v)
            d(v) = d(u)+c(u,v)
            prev(v) = u
```

Algoritmo de Dijkstra

Origen \ Destino	**S**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
S	-	0.98	0.99	0.93	0.90	-	0.95	-
1	0.98	-	0.97	0.94	-	-	0.98	-
2	0.99	0.97	-	0.96	0.93	-	-	-
3	0.93	0.94	0.96	-	-	-	-	-
4	0.90	-	0.93	-	-	0.92	0.99	-
5	-	-	-	-	0.92	-	0.94	0.95
6	0.95	0.98	-	-	0.99	0.94	-	0.95
7	-	-	-	-	-	0.95	0.95	-

Fiabilidad de los enlaces para resolver el apartado (c)

Problema 14. Una empresa tiene desplegada una red de comunicaciones para interconectar sus sedes. La topología final de la red es la que se muestra en la siguiente figura, en la que los costes de cada uno de los enlaces se han asignado teniendo en cuenta diferentes aspectos.



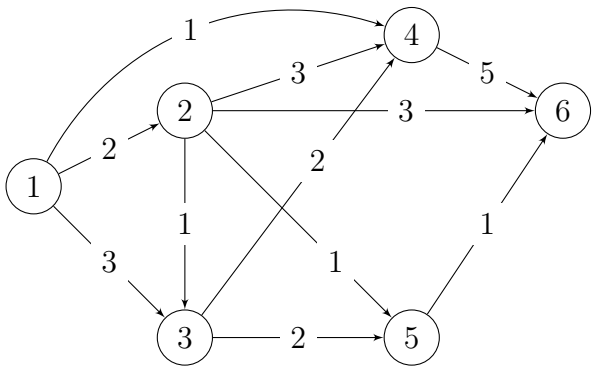
$$\Lambda_1(\text{pkt/s}) = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 4 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo entre el nodo 1 y el resto de nodos de la red.

(b) Tras un periodo de monitorización, se establece que la tasa de paquetes que se transmite desde 1 al resto de nodos es la que se muestra en el vector Λ_1. ¿Cuál es el número medio de enlaces que tendría que atravesar, en promedio, un paquete cualesquiera? Si se supone que la capacidad de cada enlace (en `bps`) tiene que ser igual o mayor que la tasa de paquetes que lo atraviesa multiplicada por 2^{10}, ¿cuál debería ser la capacidad que tendría que contratar la empresa en cada enlace de la red? (En enlaces no usados la capacidad a contratar es 0).

(c) Asumir, ahora que la capacidad de cada enlace (p_{ij}) se obtiene aplicando la siguiente expresión (donde c_{ij} es el coste del grafo anterior): $p_{ij} = 2 \cdot (5 - c_{ij})$, ¿cuál sería el grafo residual resultante si se dispusiera un flujo de 2 unidades entre 1 y 2 y otro más de 6 entre 1 y 6? (utilizar las rutas que se han obtenido en el apartado (a))

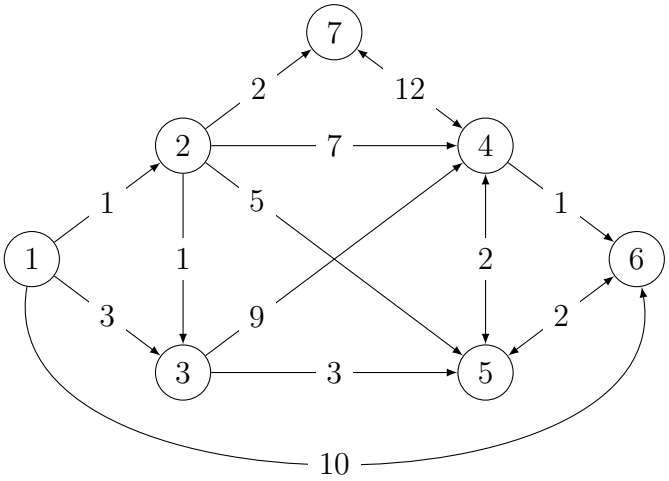
Problema 15. Se considera la topología de red que se muestra en la figura, en la que 1 es el nodo fuente y el resto son terminales que tienen que recibir la información enviada por este.



(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar la ruta de coste mínimo entre 1 y el resto de nodos de la red? Si se asume que 1 manda la misma información a todos los terminales, ¿cuál sería el número medio de enlaces que un paquete atravesaría antes de llegar a su destino? Indicar, razonadamente, un algoritmo que podría ofrecer un mejor rendimiento, sabiendo que la información que 1 transmite es la misma para todos los nodos.

(b) Si se decidiera utilizar un esquema probabilístico en el encaminamiento (cada nodo decide la interfaz por la que reenvía un paquete con una cierta probabilidad, inversamente proporcional al coste del enlace correspondiente), ¿cuál sería la probabilidad de utilizar la ruta de coste mínimo entre 1 y 6 devuelta por el algoritmo de *Dijkstra*? ¿Cuál sería la probabilidad correspondiente a la ruta $1 \to 4 \to 6$?

Problema 16. Considerar la red que se muestra en la figura.

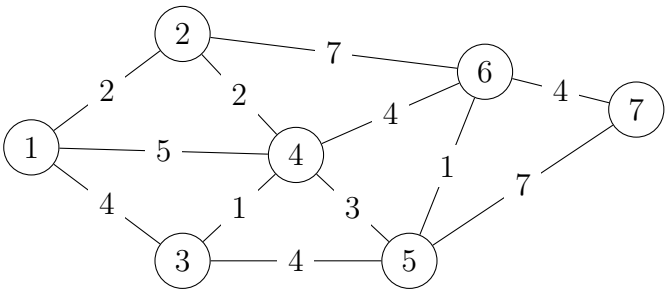


(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar la ruta de coste mínimo entre 1 y el resto de nodos de la red. Calcular la longitud y el coste promedios por ruta, si se asume que 1 manda la misma información a todos los terminales.

(b) Tras monitorizar el sistema durante tiempo suficiente, se determina que los paquetes atraviesan, en media, 2.4 enlaces y que el coste promedio es 3.4. Teniendo en cuenta que solo se transmite información a los nodos 3, 5 y 7, con una tasa *total* de 100 paquetes por segundo. ¿Cuántos paquetes por segundo envía 1 a cada uno de esos tres nodos?

(c) Si se decidiera utilizar un esquema probabilístico en el encaminamiento (cada nodo decide la interfaz por la que reenvía un paquete con una cierta probabilidad, inversamente proporcional al coste del enlace correspondiente), ¿cuál sería la probabilidad de utilizar la ruta de coste mínimo entre 1 y 5 devuelta por el algoritmo de *Dijkstra*? Si se siguen utilizando los datos del apartado anterior, ¿cuántos paquetes por segundo se transmitirían por cada uno de las tres interfaces del nodo 1?

Problema 17. Considerar la red que se muestra en la figura.



$$\Gamma\ (pkt/s) = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{4} & \overset{(3)}{4} & \overset{(4)}{1} & \overset{(5)}{0} & \overset{(6)}{3} & \overset{(7)}{8} \end{bmatrix}$$

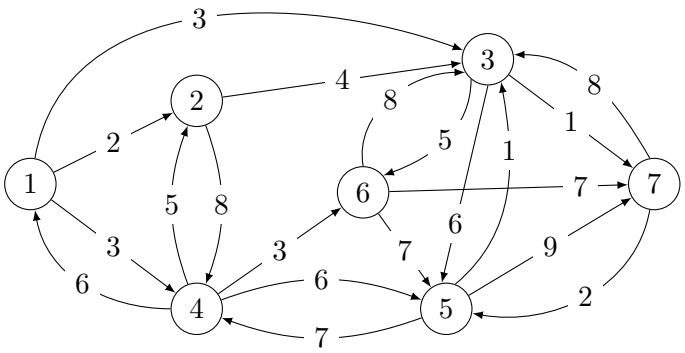
(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo entre 1 y

el resto de nodos de la red. Calcular la longitud y el coste promedio por ruta, si se asume que la tasa de paquetes que 1 genera es la que viene dada por el vector Γ.

(b) Se decide utilizar las rutas anteriores para enviar un paquete a cada destino. ¿Cuál sería el coste total en que se incurriría? Realizar el cálculo de dos maneras diferentes, para comprobar su validez.

(c) Si el paquete del apartado anterior fuera el mismo, se podría utilizar el algoritmo de *Kruksal* para encontrar una mejor solución. ¿Cuál sería dicha solución? ¿Qué ahorro se produciría en el coste?

Problema 18. Considerar la red que se muestra en la figura.



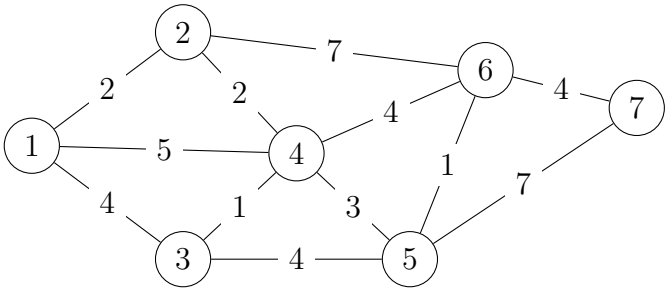
(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo entre 1 y el resto de nodos de la red. Calcular la longitud y el coste promedio, si se asume que la tasa de paquetes que genera 1 es la que se indica por el vector Γ.

$$\Gamma\ (pkt/s) = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{2} & \overset{(3)}{4} & \overset{(4)}{0} & \overset{(5)}{6} & \overset{(6)}{5} & \overset{(7)}{3} \end{bmatrix}$$

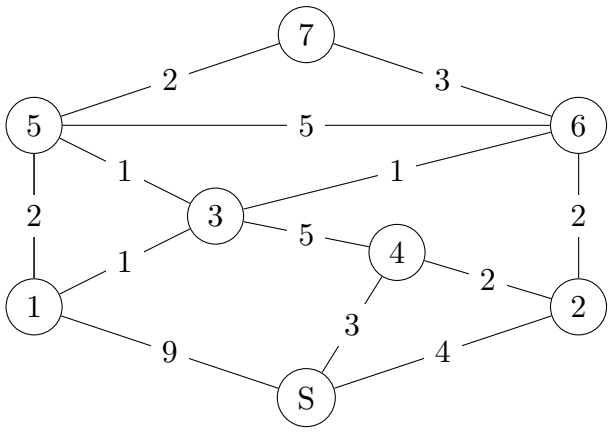
(b) Asumiendo que la capacidad de cada enlace se puede calcular a partir de su coste como: $p_{i,j} = 10 - c_{i,j}$, ¿cuál es el flujo que se podría enviar por la ruta de 1 a 5? Establecer la red residual correspondiente.

(c) Volver a calcular el coste de cada enlace en la red residual como $c_{i,j} = 10 - p_{i,j}$ y utilizar el algoritmo de *Bellman-Ford* para encontrar la ruta de menor coste entre 1 y 5. ¿Cuál es el flujo total que se enviaría entre 1 y 5 si se utilizara, junto con la anterior, esta nueva ruta? Representarlo en el grafo original. Indicar razonadamente si se podría enviar más información entre 1 y 5.

Problema 19. Ejecutar los algoritmos de *Dijkstra* y *Prim* sobre la red de la figura, utilizando como origen el nodo 1. Calcular el coste en el que se incurriría al transmitir una unidad de información a todos los nodos en ambos casos.



Problema 20. Considerar la red que se muestra en la figura.



(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo entre S y el resto de nodos de la red. Calcular la longitud y el coste promedio, si se asume que la tasa de paquetes que genera S es la que se indica por el vector Γ.

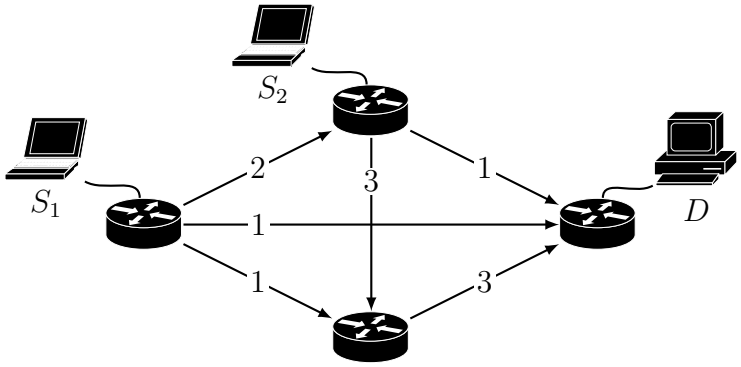
$$\Gamma\ (pkt/s) = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{3} & \overset{(2)}{0} & \overset{(3)}{1} & \overset{(4)}{5} & \overset{(5)}{6} & \overset{(6)}{3} & \overset{(7)}{2} \end{bmatrix}$$

(b) ¿Cuál sería el coste de enviar una copia del mismo paquete a todos los nodos de la red? ¿Cuál sería dicho coste si se utilizara el algoritmo de Prim?
En el Algoritmo de Prim, se actualiza un predecesor según la ecuación que se muestra seguidamente

```
if k(v) > c(u,v) then
   k(v) = c(u,v)
   prev(v) = u
```

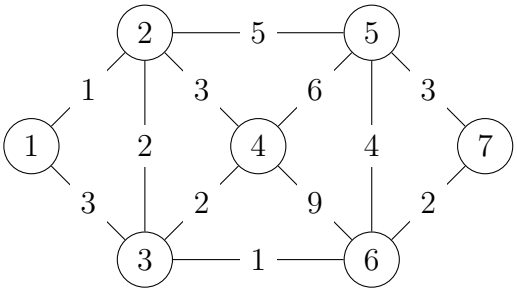
Problema 21. Considérese la red de la figura, en la que los nodos S_1 y S_2 envían tráfico a D: $\gamma_1 = 100$ p/s, $\gamma_2 = 60$ p/s, respectivamente. Se utiliza un esquema de encaminamiento

probabilista, según el cual cada nodo selecciona la interfaz de salida con una probabilidad que es inversamente proporcional al coste del enlace.



(a) Calcular el número de saltos promedio que emplea un paquete para llegar de S_1 a D.

Problema 22. Considérese el grafo de la figura.



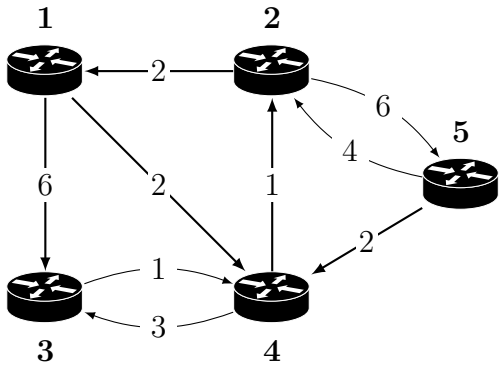
(a) Utilizar el algoritmo de Dikjstra para encontrar las rutas de menor coste entre 1 y el resto de nodos de la red. ¿Cuál sería la longitud media por ruta? ¿Y el coste promedio?
El criterio es minimizar el coste y, en caso de que hubiera dos caminos con el mismo coste, se tendría que minimizar el número de enlaces.

(b) Utilizar el algoritmo de Prim para encontrar el MST (partiendo desde 1) del grafo. ¿Cuál sería la distancia media desde S al resto de nodos?

(c) Calcular el coste de enviar un paquete desde 1 a todos los nodos de la red, utilizando las soluciones de los apartados a (con dos métodos de cálculo) y b. ¿Cuál es la ganancia relativa que se consigue al usar el MST?

(d) Se decide utilizar un esquema probabilístico de encaminamiento, según el que los nodos deciden la interfaz por la que enviarán cada paquete con una probabilidad que es inversamente proporcional al coste de dicha interfaz. ¿Con qué probabilidad se utilizaría el camino de 1 a 4 que se ha obtenido en el apartado a? ¿Y el del apartado b?

Problema 23. Considerar la red que se muestra en la figura.



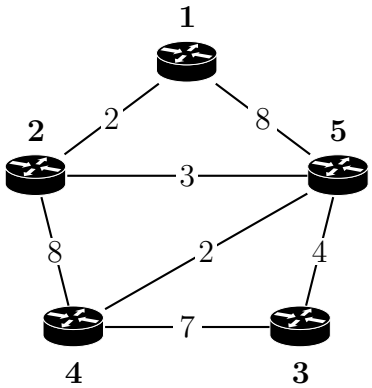
(a) Utilizar el algoritmo de *Floyd-Warshall* para encontrar las rutas de coste mínimo desde 1 y 2 al resto de nodos de la red.

(b) El nodo 1 genera 20 paquetes por segundo, 8 dirigidos a 2, y el resto, repartidos de manera uniforme, a los otros tres nodos. ¿Cuál es el coste medio y la longitud media por ruta? Por su parte, el nodo 2 genera 100 paquetes por segundo, y se sabe que $\gamma_{2,1} = \gamma_{2,5}$, y que $\gamma_{2,4} = 2 \cdot \gamma_{2,3}$. Si el número medio de enlaces es $\frac{5}{3}$, ¿cuántos paquetes por segundo envía 2 a cada uno de los otros nodos?
$\gamma_{i,j}$ son los paquetes por segundo que el nodo i envía al nodo j

Se asume ahora que la capacidad de cada enlace viene dada por $p_{i,j} = 8 - c_{i,j}$, siendo $c_{i,j}$ el coste que se ha utilizado en los apartados anteriores.

(c) Establecer la red residual después de que el nodo 1 envíe 2 unidades de flujo al nodo 5, y el nodo 2 envíe 3 unidades de flujo al nodo 3, utilizando las rutas que se han establecido en el apartado (a).

Problema 24. Considerar la red que se muestra en la figura.



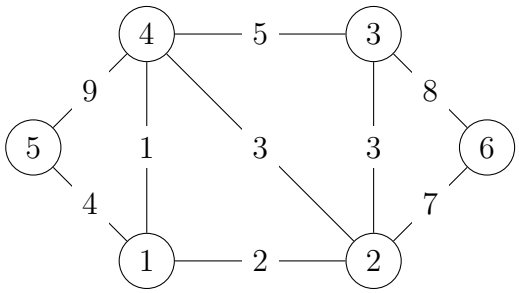
(a) Utilizar el algoritmo de *Floyd Warshall* para encontrar las rutas de coste mínimo desde los nodos 2 y 3 al resto de nodos de la red.

(b) Si el nodo 2 genera la misma tasa hacia todos los nodos de la red, ¿cuál sería la distancia y el coste medio de un paquete cualquiera que salga de 2?

(c) El tráfico generado por el nodo 3, para cada destino, es proporcional al número de enlaces de la ruta correspondiente, ¿cuáles serían el número medio de enlaces y el coste medio para un paquete cualquiera originado en 3?

(d) Si se impusiera para el nodo 1 una política de no utilizar el nodo 5 para alcanzar a ningún destino, ¿cuáles serían las rutas que usaría para alcanzar al resto de nodos de la red? Se pide una respuesta justificada, sin utilizar ningún algoritmo de encaminamiento adicional.

Problema 25. Considérese el grafo de la figura, $\mathcal{G}$.



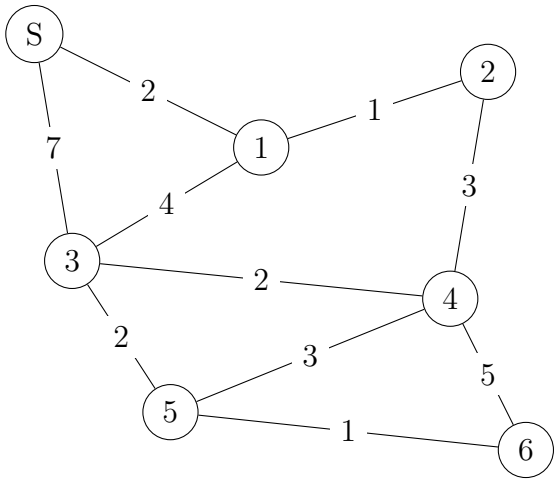

```
for all (u,v) in L (in order)
if u & v belong to same tree
   discard (u,v)
else
   A = A U (u,v)
```

Algoritmo de *Kruksal*

(a) Utilizar el algoritmo de *Kruksal* para establecer el *Minimum Spanning Tree (MST)* de $\mathcal{G}$.

(b) Calcular el número de enlaces promedio que atravesarían los paquetes generados en el nodo 1 para llegar al resto de los nodos de $\mathcal{G}$ utilizando dicho árbol.

Problema 26. Considerar la red que se muestra en la figura.



INITIALIZATION

1. d(S) = 0; Q = {∅}
2. for all v in N but S
3. d(v) = ∞
4. Q = N

MAIN LOOP

5. while Q ≠ ∅
6. u vertex in Q with min{d(v)}
7. delete u from Q
8. for all v adjacent to u
9. if d(v) > d(u) + c(u,v)
10. d(v) = d(u)+c(u,v)
11. prev(v) = u

Algoritmo de Dijkstra

(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo del nodo S al resto de nodos de la red.

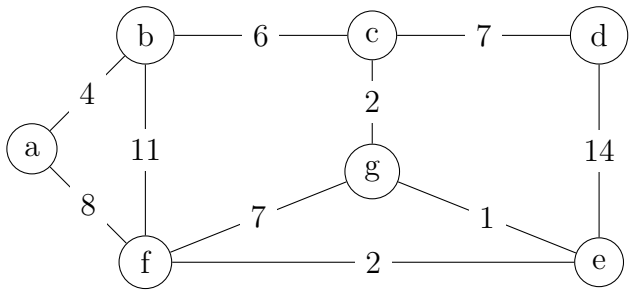
(b) Se sabe que el tráfico generado por el nodo S es: $\Gamma = [\ 0,\ 6,\ 4,\ 8,\ 0,\ 2\ ]\ s^{-1}$. Calcular el coste y el número de enlaces que atravesaría, en promedio, un paquete originado en S. ¿Cuántos paquetes por segundo se transmitirían en cada uno de los enlaces de la red?

(c) Si se utilizara una política de encaminamiento probabilístico, según la que un nodo elige el enlace con una probabilidad inversamente proporcional a su coste, ¿cuántos paquetes (de los dirigidos a 4) utilizarían la ruta que resulta de aplicar el algoritmo de *Dijkstra*, si se observara la red durante un minuto?

(d) ¿Qué cambios habría que hacer en el pseudocódigo del algoritmo de *Dijkstra* para que su criterio fuera el de maximizar la capacidad de cada ruta (métrica cuello de botella)?

(e) Utilizar el algoritmo de *Kruksal* para establecer el MST del grafo anterior, indicando brevemente los pasos que se tienen que dar.

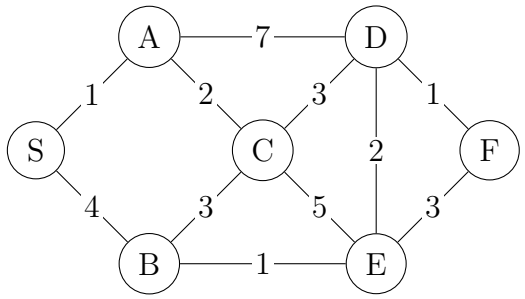
Problema 27. Considérese el grafo de la figura, $\mathcal{G}$.



(a) Utilizar el algoritmo de *Prim* para establecer el *Minimum Spanning Tree (MST)* de $\mathcal{G}$, partiendo del nodo a. ¿Es la ruta que resulta entre los nodos a y f la de menor coste posible? Justificar la respuesta.

(b) Si se utilizara el algoritmo de *Floyd-Warshall* (en orden lexicográfico de los nodos, de menor a mayor) para establecer las rutas de coste mínimo, ¿cuáles serían las correspondientes al nodo a, después de tres iteraciones del algoritmo? ¿Y las del nodo e? Justificar la respuesta, sin ejecutar los diferentes pasos del algoritmo.

Problema 28. Considerar el grafo que se muestra en la figura.



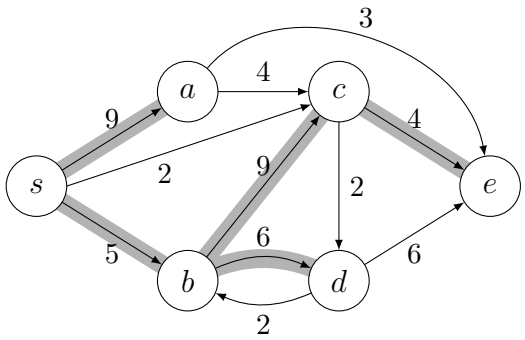
(a) Utilizar el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas de coste mínimo del nodo S al resto de nodos de la red.

(b) Se sabe que la tasa (paquetes por segundo) generada por el nodo S es: $\Gamma = [\,1,\ 4,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0\,]\ s^{-1}$. Calcular el coste y el número de enlaces que atravesaría, en promedio, un paquete originado en S.

(c) Calcular el coste de enviar un paquete a todos los nodos de la red, utilizando las rutas que se han obtenido en el apartado (a). Utilizar dos métodos de cálculo para comprobar la validez del resultado.

(d) Utilizar el algoritmo de *Prim* para establecer el MST del grafo anterior, a partir del nodo S. ¿Qué ganancia se obtendría en el coste de difundir n paquetes con el MST frente al supuesto de utilizar las rutas obtenidas con *Dijkstra*?

Problema 29. Considérese el grafo de la figura, $\mathcal{G}$, en el que se indican las rutas a utilizar desde el nodo s, establecidas con un algoritmo de encaminamiento, según una política determinada. La información que se indica para cada uno de los enlaces se corresponde con su capacidad.



(a) El nodo s envía 100 paquetes por segundo al nodo d. ¿Cuántos paquetes por segundo utilizarían la ruta establecida por el algoritmo utilizado, si se decidiera emplear un esquema de encaminamiento probabilístico, según el que un nodo elige el enlace, a la hora de reenviar cada paquete, con una cierta probabilidad, proporcional a su capacidad.

(b) Representar la red residual resultante, si el nodo s envía 2 unidades de flujo al nodo d y 3 al nodo e.

E.T.S.I.I.T - Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Redes de Comunicaciones

Curso 2023/2024

Tema 2 - Algoritmos en redes
Soluciones de la hoja de problemas

Problema 1.

(a) S — A — D — B
                \
                C — E

(b) S — B — D — E — A
    \   \   \
      C   F   G

(c) S — C — A — B — D — E
    \
      H — I — F
            \
              G

Problema 3.

(a) T - A - B - C - E - R (coste=9)

Problema 4.

(a) T - A - B - C - E - R
≈ 0.913

Problema 5.

(a) 1 – 3 – 4 – 6

(b) $\frac{2}{21}$

(c) ≈ 0.59 pkt/s

Problema 6.

(a)

(b)

(c) 5 – 3 – 4 – 1 – 2

(d) 3 – 4 – 1 – 2
        \
          5

Problema 7.

(a)

(b) 1.35 enlaces

Problema 9.

(a) 1 – 3 – 2 – 4
        \
          5

(b)

(c) T - A - B - C - D
                \
                E - F

(d)

(e) S — A — D — B
            \
              E — C

Problema 10.

(a) S – 1 – 2 – 5 – 4
    \   \   \
      3   6   7

(b) 2.125 enlaces.

(c)

Problema 11.

(a)

(b) S – 1 – 3 – 2 – 4
    \
      5 – 6

(c) 1.6875 enlaces

Problema 12.

(a)
```
          D
         /
      A — E
     /
S — B — F
     \
      C
```

(b) 1.8 enlaces

(c)

(d)

Problema 13.

(a) S − 1 − 2 − 3
2 enlaces

(b) S − 1 − 2 − 3
\ 6 − 4
\ 5 − 7
2.57 enlaces

(c)

Problema 14.

(a) 1 − 4 − 2
\ 5 − 3
\ 7 − 6

(b) 1.35 enlaces

(c)

Problema 15.

(a) 3
/ 1 − 2 − 5 − 6
\ 4
1.6 enlaces

(b) $\frac{9}{88}$ y $\frac{6}{11}$

Problema 16.

(a) 1 − 2 − 3 − 5 − 4
\ 7 \ 6
$\overline{c} = 4.17$, $\overline{e} = 2.67$

(b) $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_7 = \{40, 40, 20\}$ p/s

(c) $\gamma_{\to 2, \to 3, \to 6} = \{69.77, 23.25, 6.98\}$ p/s

Problema 17.

(a) 1 − 2 − 4 − 5
\ 3 \ 6 − 7
$\overline{c} = 7.4$, $\overline{e} = 2.55$

(b) 37

(c) 24

Problema 18.

(a) 2
/ 1 − 3 − 7 − 5
\ 4 − 6
$\overline{c} = 4.7$, $\overline{e} = 2$

(b) 7

(c) 1 − 2 − 3
\ 4 − 5 − 7
\ 6
11

Problema 19.

(a) DIJKSTRA: 1 − 2 − 4 − 5
\ 3 \ 6 − 7
37

(b) PRIM: 1 − 2 − 4 − 5 − 6 − 7
\ 3
13

Problema 20.

(a) S − 2 − 6 − 3 − 1
\ 7 \ 5
6.5; 2.8 enlaces

(b) 45; 12

Problema 21.

(a) 1.65 saltos

Problema 22.

(a) 3 − 6 − 7
/ 1 − 2 − 4
\ 5
4; $\frac{11}{6}$ enlaces

(b) 1 – 2 – 3 – 6 – 7 – 5
    \
     4

3 enlaces

(c) $c_{\text{dijkstra}} = 24$; $c_{\text{prim}} = 11$

(d) $\mathcal{P}_{\text{dijkstra}} = 0.123$; $\mathcal{P}_{\text{prim}} = 0.092$

Problema 23.

(a) 1 – 4 – 2 – 5
        \
         3

2 – 1 – 4 – 3
  \
   5

(b) $\overline{c} = 4.4$, $\overline{d} = 2$

$\gamma_{2,1} = \gamma_{2,5} = 25\ s^{-1}$;

$\gamma_{2,3} = \frac{100}{6}\ s^{-1}$; $\gamma_{2,4} = \frac{100}{3}\ s^{-1}$

(c)

Problema 24.

(a) 2 – 5 – 3
  \   \
   1   4

3 – 5 – 2 – 1
        \
         4

(b) $\overline{c} = 4.25$, $\overline{d} = 1.5$ enlaces

(c) $\overline{c} = 7.125$, $\overline{d} = 2.25$ enlaces

(d) 1 – 2 – 4 – 3
        \
         5

Problema 25.

(a)
    5
   /
1 – 2 – 3
  \   \
   4   6

(b) 1.4 enlaces

Problema 26.

(a) S – 1 – 2 – 4
        \
         3 – 5 – 6

(b) $\overline{c} = 5.4$, $\overline{d} = 2.6$ enlaces

(c) 53.3 paquetes

(d)

(e) S – 1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6

Problema 27.

(a) a – b – c – d
            \
             g – e
               \
                f

(b)
a – *b* – *c* – *d*
  \   \
   f   *g*

   f
  /
e – *d*
  \
   g

Problema 28.

(a) s – a – c – d – f
  \
   b – e

(b) $\overline{c} = 3.6$, $\overline{d} = 1.5$ enlaces

(c) 26

(d) s – a – c – b – e – d – f

$10 \cdot n$ frente a $26 \cdot n$

Problema 29.

(a) 12.5 p/s

(b)