

# Dimensionado y Planificación de Redes

## Tema 3 – Modelo M/M/1 y extensiones

Ramón Agüero Calvo

[ramon.agueroc@unican.es](mailto:ramon.agueroc@unican.es)

# Contenido

- Repaso
- Modelo M/Ek/1
- Modelo M/Hk/1
- Modelo M/G/1
- Sistemas con prioridad

# Contenido

- Repaso
- Modelo M/Ek/1
- Modelo M/Hk/1
- Modelo M/G/1
- Sistemas con prioridad

# Conceptos básicos

## ▪ Modelos de Poisson

- El número de llegadas en un tiempo determinado sigue una distribución de Poisson

$$\Pr\{k \text{ llegadas en } T\} = P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

- Implica que el tiempo entre llegadas consecutivas sigue una distribución exponencial negativa de tasa  $\lambda$
- La duración de las llamadas sigue una función densidad de probabilidad (fdp) exponencial negativa de media  $1/\mu$

$$f_{T_s}(t_s) = \mu e^{-\mu t_s}$$

- La tasa de llegadas al sistema es constante (proceso estacionario)

## ▪ Procesos de nacimiento y muerte

# Conceptos básicos

- Relación de Little:  $N = W \lambda$ 
  - N: Número medio de elementos en el sistema (cola, servidores o sistema completo)
  - W: Tiempo medio de permanencia en el sistema
  - $\lambda$ : Tasa de llegadas al sistema

## Modelo M/M/1 – Nodo de comunicaciones

- Se modela el nodo de comunicaciones como un sistema en el que...
    - Las llegadas siguen un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$
    - La distribución del tiempo de servicio es exponencial, con media  $1/\mu$  ( $t_s$ )
- $$t_s = \frac{1}{\mu} = \frac{L}{C} \quad \begin{array}{l} L: \text{Longitud media de paquete (exp. negativa)} \\ C: \text{Capacidad interfaz (constante)} \end{array}$$
- Sólo hay un única interfaz para transmitir los paquetes
  - La cola de espera se supone infinita, así que no hay pérdida
- Se modela el sistema como una sucesión de estados:  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 
    - Cada estado se corresponde con el # de paquetes que hay en el sistema
    - Si  $n > 1$  hay algún paquete esperando
  - Se puede demostrar que la probabilidad de cada estado es  $p_n = \rho^n(1 - \rho)$

donde  $\rho$  (tráfico) se puede calcular como  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot t_s = \frac{\lambda \cdot L}{C}$

# Modelo M/M/1 – Nodo de comunicaciones

- A partir de dicho resultado se puede caracterizar el sistema...

- Número medio de clientes en el sistema

$$\begin{aligned} \bar{N}_t &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^k (1 - \rho) = \rho(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} = \rho(1 - \rho) \frac{d}{d\rho} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \right) = \\ &= \rho(1 - \rho) \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1 - \rho} \right) = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$

- Número medio de clientes en la cola

$$\bar{N}_Q = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1) \rho^k (1 - \rho) = (1 - \rho) \sum_{t=0}^{\infty} t \rho^{t+1} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- Tiempo medio en el sistema y en la cola, aplicando la relación de Little

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_t &= \tau = \frac{\bar{N}_t}{\lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{t_s}{1 - \rho} \\ \bar{T}_Q &= \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{t_s \rho}{1 - \rho} \end{aligned} \right\} \bar{T}_t - \bar{T}_Q = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu} = t_s$$

# Contenido

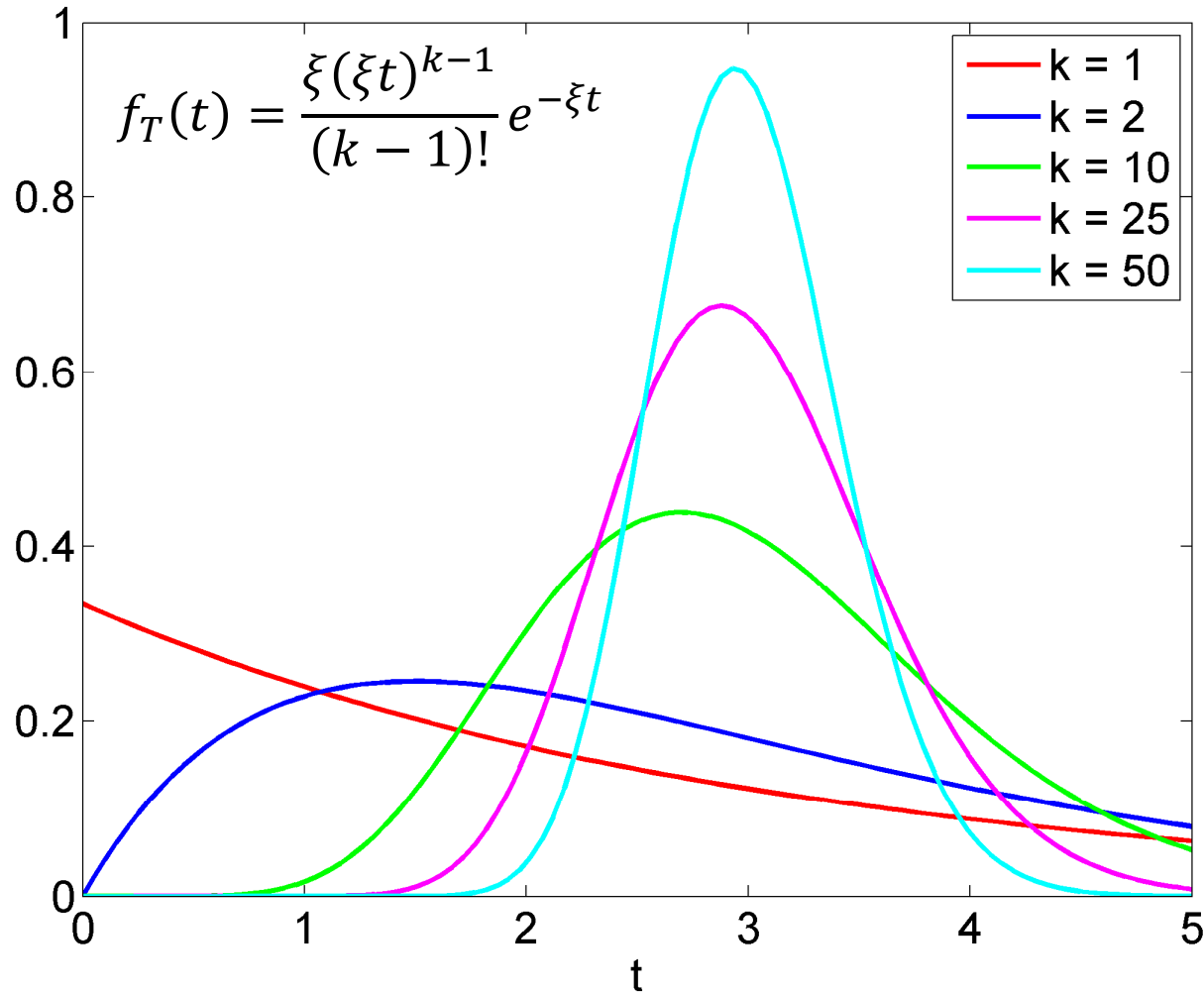
- Repaso
- Modelo M/Ek/1
- Modelo M/Hk/1
- Modelo M/G/1
- Sistemas con prioridad



# Introducción

- Se basa en el método de las fases, y asume una llegada *memoryless* (Poisson)
- Se asume que el servicio (servidor) se constituye de una concatenación de servicios en serie
  - Sólo puede haber una llamada en el sistema completo, por lo que no es posible que haya más de una 'fase' ocupada
- Cada una de las fases tiene un tiempo de servicio, distribuido según una va exponencial negativa de tasa  $\xi = k\mu$
- El tiempo de servicio total será la suma de los tiempos de servicio de cada fase
- La suma de  $k$  variables aleatorias exponenciales negativas con media  $1/k\mu$  da lugar a una variable aleatoria con distribución Erlang- $k$

# Distribución Erlang-k



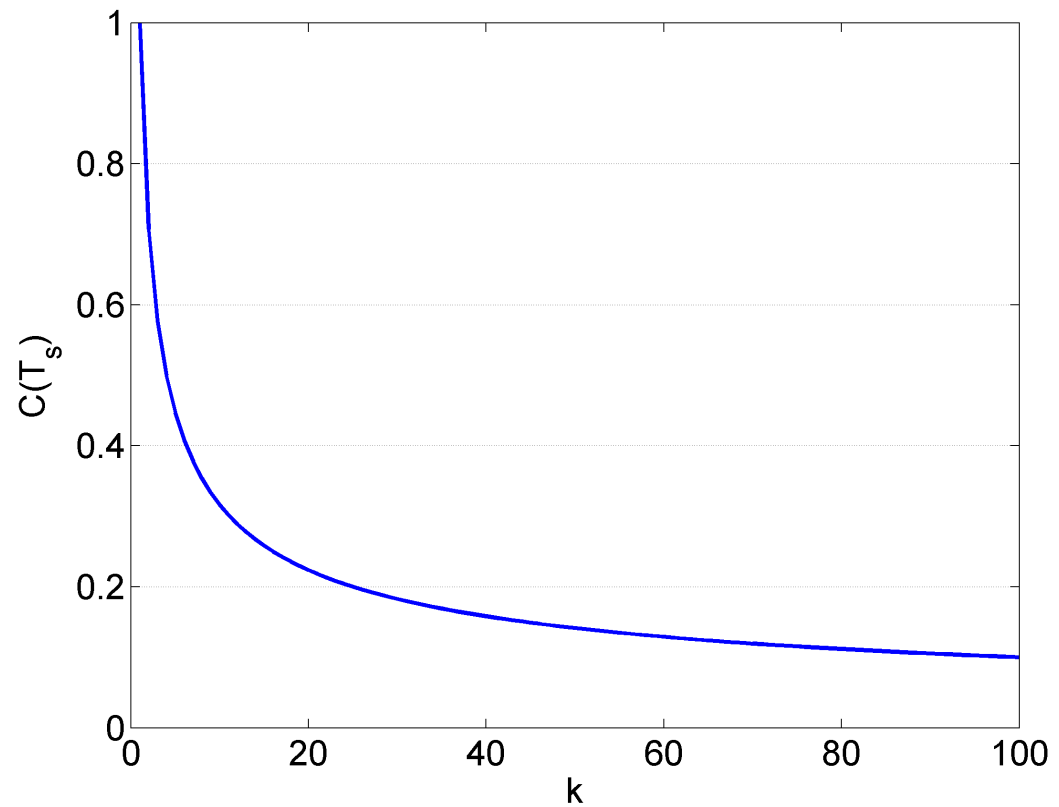
# Distribución Erlang-k

- Sus valores característicos son los que aparecen a continuación
  - Se recuerda que la tasa de cada una de las ‘fases’ es  $k\mu$

$$\bar{T}_s = \frac{k}{\xi} = \frac{1}{\mu}$$

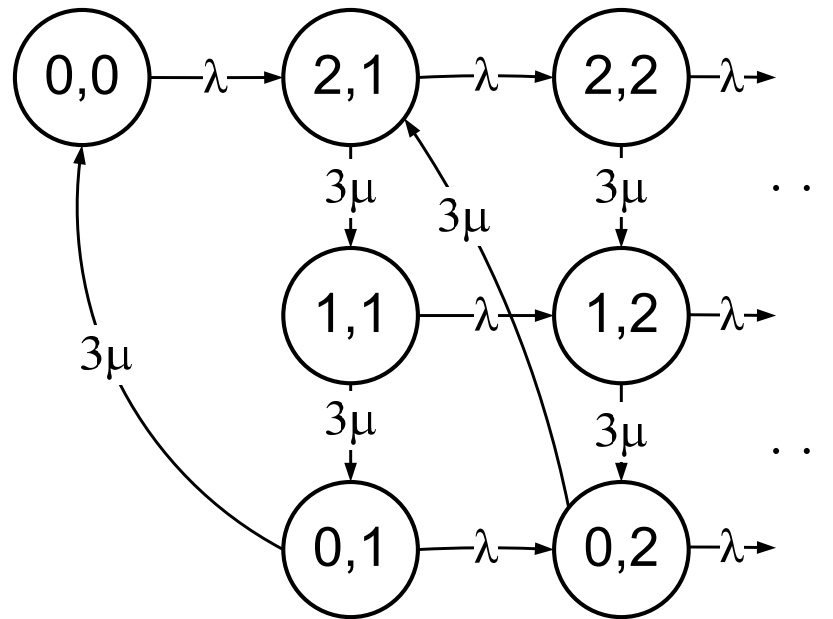
$$\sigma(T_s) = \frac{\sqrt{k}}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \mu}$$

$$C(T_s) = \frac{1}{\sqrt{k}}$$



# Cadena equivalente

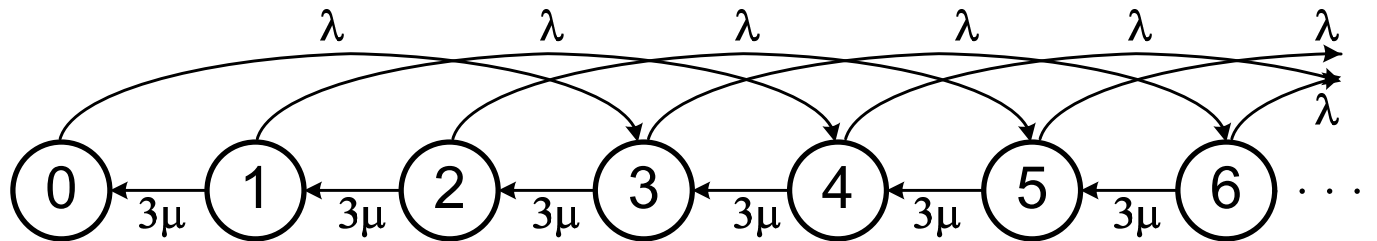
- Su solución exacta se realiza a base una cadena de Markov en dos dimensiones  $[X_1(t), X_2(t)]$ , con...
  - $X_1(t)$ : cadena en dirección vertical, que modela la descomposición del servidor
  - $X_2(t)$ : cadena en dirección horizontal, que modela el número de paquetes en el sistema



Ejemplo ilustrativo, con  $k = 3$

# Cadena equivalente

- Cadena unidimensional: llegada “a ráfagas”



- Ecuaciones de balance de flujo

$$\lambda p_0 = k\mu p_1$$

$$(\lambda + k\mu)p_i = k\mu p_{i+1} \quad i = 1 \dots k - 1$$

$$(\lambda + k\mu)p_i = \lambda p_{i-k} + k\mu p_{i+1} \quad i = k \dots \infty$$

- Solución compleja – ecuaciones diferenciales: transformada Z

## Solución

- Número de ‘fases’ que quedan en el sistema

$$P_i = (1 - \rho) \sum_{m=1}^k A_m (z_m)^{-i} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$A_m = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k \frac{1}{1 - \frac{z_m}{z_j}}$$

- Los  $z_j$  son las raíces del polinomio  $k\mu - \lambda(z + z^2 + \dots + z^k)$

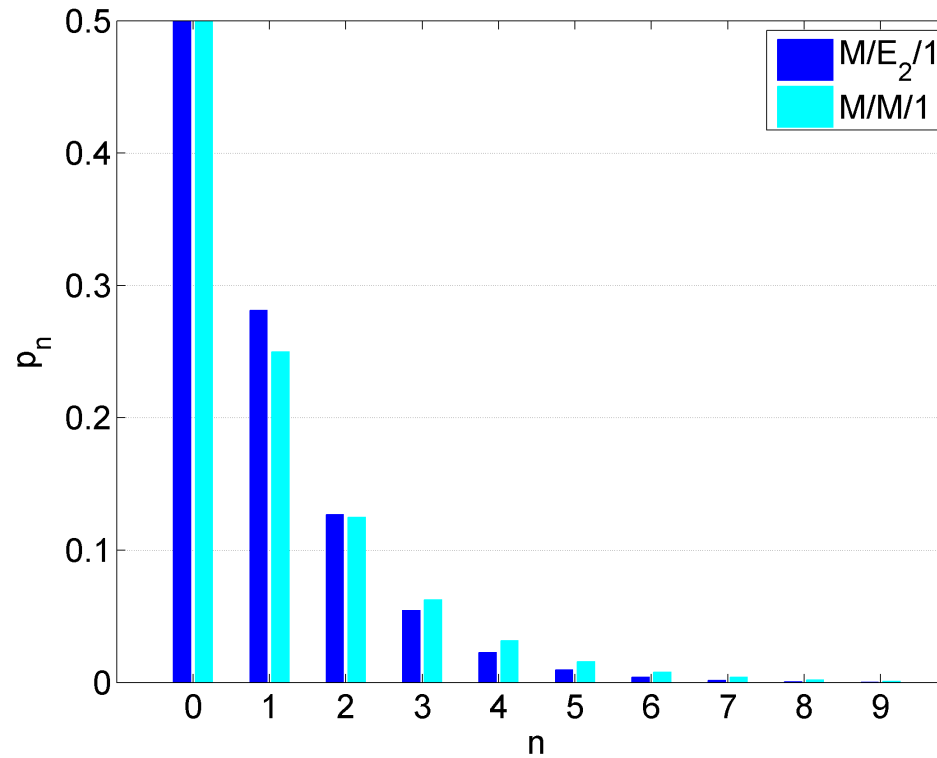
- Finalmente, se puede obtener el número total de “clientes” en el sistema

$$p_n = \sum_{i=(n-1)k+1}^{nk} P_i \quad n = 1, 2, \dots$$

# Ejemplo

■ Parámetros del modelo

- $\lambda = 50$  paquetes por segundo (proceso de Poisson)
- $T_s = 10$  ms ( $\mu = 0.01$ )
- $A(\rho) = 0.5$
- $k = 2$



## Aplicación – Llegada a ráfagas

- El modelo M/E<sub>k</sub>/1 visto anteriormente se puede utilizar para analizar un sistema en el que las llegadas (proceso de Poisson) vienen con  $k$  clientes/procesos, etc
  - Por ejemplo se podría modelar situaciones en las que los paquetes generados por la aplicación tuvieran un tamaño grande y tuvieran que ser “troceados”
- Para que la equivalencia fuera total, la tasa de la variable aleatoria del tiempo de servicio debería ser  $k\mu$
- El modelo se podría generalizar a situaciones en las que el tamaño del “batch” fuera aleatorio

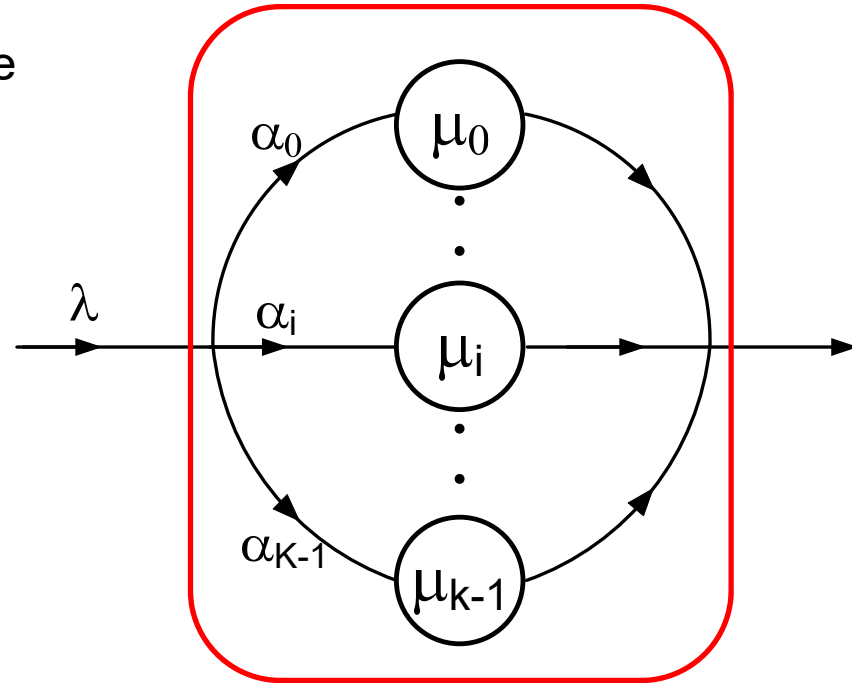


# Contenido

- Repaso
- Modelo M/Ek/1
- **Modelo M/Hk/1**
- Modelo M/G/1
- Sistemas con prioridad

# Introducción

- Se asume que el servidor (servicio) se compone de  $k$  entidades
  - Cada entidad tiene un tiempo de servicio modelado con una variable aleatoria exponencial negativa de tasa  $\mu_i$
- El cliente, al llegar al servicio, elige la rama  $i$ -ésima con probabilidad  $\alpha_i$ 
  - Se cumple que  $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1$
- El tiempo de servicio *global* se corresponde con una variable aleatoria hiperexponencial



*Servicio 'completo'*

$$f_{T_s} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i t}$$

# Distribución hiper-exponencial

- Valores característicos

$$\bar{T}_s = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\mu_i} \qquad \sigma(T_s) = \sqrt{2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\mu_i^2} - \left( \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\mu_i} \right)^2}$$

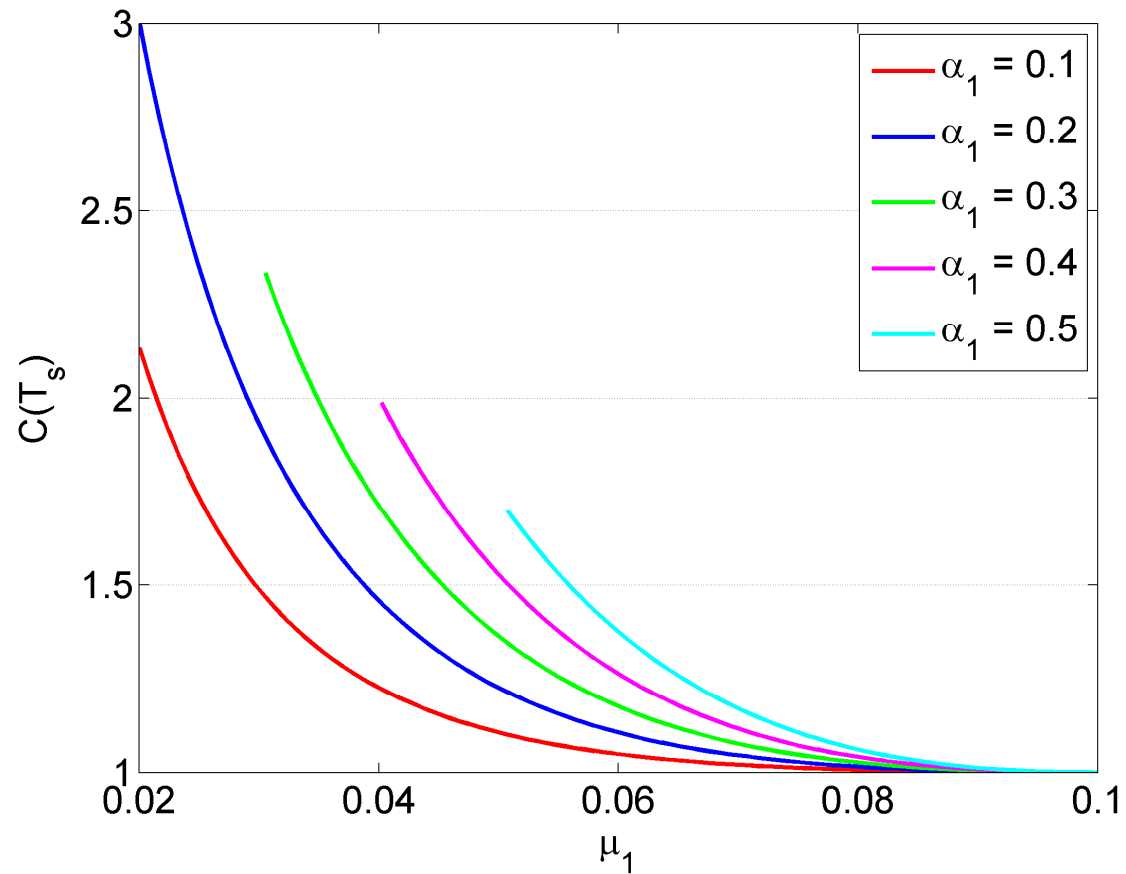
- Coficiente de dispersión

$$C(T_s) = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{\alpha_i}{\mu_i^2} \right)}{\left( \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\mu_i} \right)^2} - 1}$$

- $C(T_s) \geq 1$  (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

# Variación del $C(T_s)$

- Ejemplo ilustrativo, con...
  - $K = 2$
  - $E(T_s) = 10$  ms



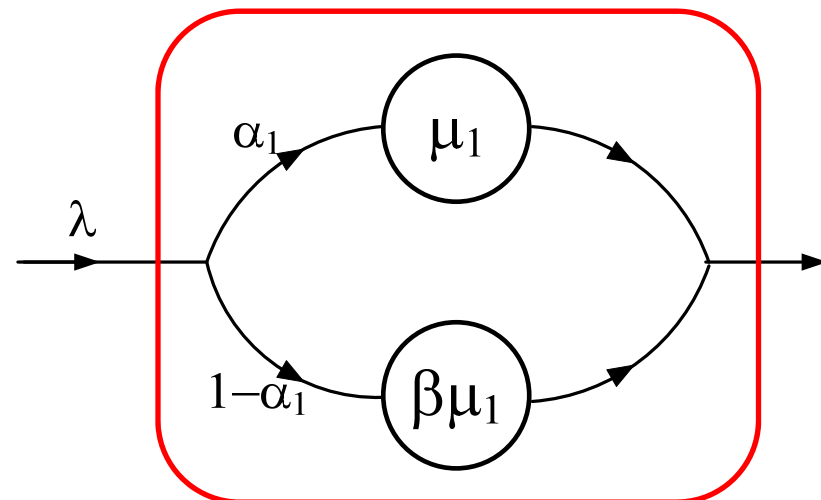
## Ejemplo (k=2)

- Si  $k = 2$  ( $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ ), y asumimos que  $\mu_2 = \beta \mu_1$ , resulta que...

$$\bar{T}_s = \frac{1}{\mu_1} \left( \alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{\beta} \right)$$

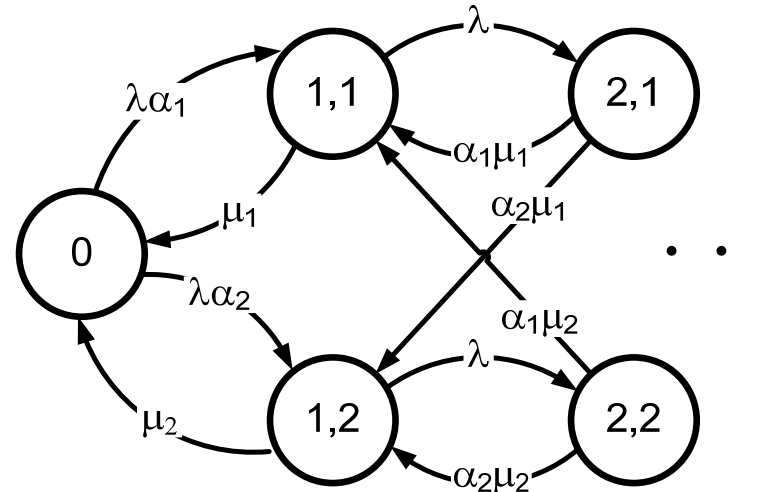
$$\sigma(T_s) = \frac{1}{\mu_1} \sqrt{2 \left( \alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{\beta^2} \right) - \left( \alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{\beta} \right)^2}$$

$$C(T_s) = \sqrt{\frac{2 \left( \alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{\beta^2} \right)}{\left( \alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{\beta} \right)^2} - 1}$$



*Servicio 'completo' –  $E(T_s) = \mu^{-1}$*

## Ejemplo (k=2) – Cadena equivalente



- Ecuaciones de balance de flujo

$$p_0\lambda = p_{1,1}\mu_1 + p_{1,2}\mu_2$$

$$p_{i,1}(\lambda + \mu_1) = p_{i-1,1}\lambda + p_{i+1,1}\alpha_1\mu_1 + p_{i+1,2}\alpha_1\mu_2$$

$$p_{i,2}(\lambda + \mu_2) = p_{i-1,2}\lambda + p_{i+1,1}\alpha_2\mu_1 + p_{i+1,2}\alpha_2\mu_2$$

- De manera genérica

$$p_{i,j}(\lambda + \mu_j) = p_{i-1,j}\lambda + \alpha_j(p_{i+1,1}\mu_1 + p_{i+1,2}\mu_2)$$

# Contenido

- Repaso
- Modelo M/Ek/1
- Modelo M/Hk/1
- **Modelo M/G/1**
- Sistemas con prioridad

# Introducción

- El modelo M/G/1 considera...
  - Proceso de llegadas según un proceso de Poisson
  - Tiempo de servicio distribuido según una variable aleatoria genérica
  - Un servidor
  - Capacidad de espera infinita
- Los casos M/E<sub>k</sub>/1 y M/H<sub>k</sub>/1 son particularizaciones y se ha visto que su solución “exacta” es compleja
- Para analizar el rendimiento de este tipo de sistemas se utiliza el método de las cadenas de Markov *embebidas*
- Se obtienen los valores medios estudiados para el caso del M/M/1: número medio de unidades en el sistema y en la cola de espera
  - A partir de ellos se obtiene los tiempos medios
- Se sigue cumpliendo que  $p_0 = 1 - \rho$  y que el número medio de servidores ocupados (factor de utilización) es  $\rho$



## Fórmula Pollaczek-Khintchine (PK)

- Considerar un usuario que llega a un sistema; ¿cómo se puede determinar el retraso que tendrá que soportar?
- Dicho retraso tiene dos posibles contribuciones
  - Los clientes que pudieran estar esperando
  - El cliente que pudiera estar en el servidor
- Si hay  $N_Q$  clientes esperando, el retraso *total (valor medio)* que ocasionan será  $N_Q \cdot E(T_S)$
- El retardo ocasionado por el cliente que se encuentra en el servidor será  $E(\text{tiempo servicio residual} \mid \text{servidor ocupado})$
- En total se tendrá que...

$$T_Q = N_Q E(T_S) + \Pr\{\text{servidor ocupado}\} \cdot E(\text{tiempo servicio residual} \mid \text{servidor ocupado})$$

## Fórmula Pollaczek-Khintchine (PK)

- Por la relación de Little se sabe que  $N_Q = T_Q \cdot \lambda$
- Además, la probabilidad de que el servidor esté ocupado coincide con el factor de utilización, y  $\rho = \lambda \cdot E(T_s)$ , con lo que tendremos que...

$$T_Q = \frac{\rho \cdot E(\text{tiempo servicio residual | servidor ocupado})}{1 - \rho}$$

- Solo queda por conocer  $E(\text{tiempo servicio residual | servidor ocupado})$ ; por la *renewal theory* se obtiene que...

$$E(\text{tiempo servicio residual | servidor ocupado}) = \frac{E(T_s^2)}{2E(T_s)} = \frac{1 + C(T_s)^2}{2} E(T_s)$$

- Para obtener finalmente que...

$$T_Q = \frac{1 + C(T_s)^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot E(T_s)$$

**Fórmula de Pollaczek-Khintchine (PK)**

# Fórmula Pollaczek-Khintchine (PK)

- Solo se requiere conocer los momentos de orden 1 y 2 de la variable aleatoria tiempo de servicio para calcular el número medio de unidades en el sistema de espera
- Particularización de la fórmula de PK

Sistema	Tiempo de servicio (va)	C(Ts)	T <sub>Q</sub>
M/M/1	Exponencial negativa	1	$\frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(T_s)$
M/Ek/1	Erlang-k	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\frac{k+1}{2k} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(T_s)$
M/D/1	Determinista	0	$\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(T_s)$

- Se observa que...

$$T_Q = \frac{1 + C(T_s)^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(T_s) = \frac{1 + C(T_s)^2}{2} \cdot (T_Q)_{MM1}$$

# Caracterización de un sistema M/G/1

- A partir de la fórmula PK, se pueden obtener todos los parámetros de rendimiento del sistema...

Sistema	Tiempo de permanencia	Número de unidades (paquetes) Little: $N = T \cdot \lambda$
Servidor	$T_S = E(T_S)$	$N_S = \rho$
Cola	$T_Q = \frac{1 + C(T_S)^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot E(T_S)$	$N_Q = \frac{1 + C(T_S)^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
Total	$T_t = \left[1 - \frac{\rho}{2}(1 - C(T_S)^2)\right] \cdot \frac{E(T_S)}{1 - \rho}$	$N_t = \left[1 - \frac{\rho}{2}(1 - C(T_S)^2)\right] \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}$

# Contenido

- Repaso
- Modelo M/Ek/1
- Modelo M/Hk/1
- Modelo M/G/1
- Sistemas con prioridad

# Motivación

- En sistemas de espera pura el QoS se puede “asociar” al retardo medio total (tiempo de permanencia en el sistema)
- ¿Qué sucede cuando hay varios tipos de servicio?
  - Se tienen que considerar los parámetros para cada tipo de servicio de manera individual
- Posibilidades de diseño
  - Túneles virtuales (*virtual tunnels*): hay una cola y una capacidad “reservada” para cada servicio – varios M/M/1 independientes entre sí
  - Sobredimensionado (*over-engineering*): se utiliza el criterio de QoS más restrictivo para dimensionar el sistema y todos los servicios comparten el *buffer* de espera y la capacidad
  - Prioridad (*priority queing*): todos los servicios comparten la misma capacidad, pero se establecen diferentes *buffer* de espera y prioridades entre ellos

# Planteamiento

- Se cuenta con un sistema de un único servidor que gestiona varios tipos de servicio
- Cada uno de esos servicios está caracterizado por...
  - Llegadas: proceso de Poisson de tasa  $\lambda_k$
  - Tiempo de servicio: variable aleatoria  $T_s$  (genérica)
- Cuando el servidor está vacío selecciona “paquetes” (nodo de comunicaciones) por orden de prioridad
  - Siempre drenará los paquetes del buffer  $i-1$  antes de comenzar con los del buffer  $i$
- Se asume además que los paquetes no pueden “desplazar” a otros cuando están siendo servidos (a pesar de que sean de mayor prioridad): *nonpreemptive system*
- La utilización del servidor para los paquetes del servicio  $k$ -ésimo será  $\rho_k = \lambda_k \cdot E[(T_s)_k]$
- Se tiene que cumplir que el factor de utilización total  $\rho = \sum_{i=0}^K \rho_i < 1$  (condición de estabilidad)

## Ejemplo con dos servicios $(T_Q)_1$

- Sean dos servicios ( $i = 1,2$ ), con 1 siendo más prioritario que 2
- ¿Cuál es el tiempo medio de espera para los “paquetes” del servicio 1?
- Se pueden distinguir dos contribuciones
  - Paquetes de tipo 1 que estén esperando:  $(N_Q)_1$
  - Tiempo que le queda al paquete que esté en el servidor (puede ser de tipo 1 ó 2) – tiempo de servicio residual

- Tendremos, por tanto...

$$(T_Q)_1 = (N_Q)_1 E[(T_S)_1] + \Pr\{\text{servidor ocupado}\} E(t_s \text{ residual} \mid \text{servidor ocupado})$$

- Teniendo en cuenta que  $(N_Q)_1 = \lambda_1 \cdot (T_Q)_1$ ,  $\lambda_1 \cdot E[(T_S)_1] = \rho_1$ , y  $\Pr\{\text{servidor ocupado}\} = \rho$ , se llega a...

$$(T_Q)_1 = \frac{\rho \cdot E(t_s \text{ residual} \mid \text{servidor ocupado})}{1 - \rho_1}$$



## Ejemplo con dos servicios $(T_Q)_1$

- En este caso, la esperanza del tiempo de servicio residual tendrá que considerar que el servicio activo puede ser de tipo 1 ó 2

$$\begin{aligned}
 E(t_s \text{ residual} \mid \text{servidor ocupado}) &= \Xi = \\
 &= E((t_s)_1 \text{ residual} \mid \text{servicio 1 ON}) \cdot \Pr\{1 \text{ ON} \mid \text{servidor ocupado}\} + \\
 &\quad + E((t_s)_2 \text{ residual} \mid \text{servicio 2 ON}) \cdot \Pr\{2 \text{ ON} \mid \text{servidor ocupado}\}
 \end{aligned}$$

donde...

$$\Pr\{j \text{ ON} \mid \text{servidor ocupado}\} = \frac{\rho_j}{\rho}$$

$$E\left((t_s)_j \text{ residual} \mid \text{servicio } j \text{ ON}\right) = \frac{E[(T_s)_j^2]}{2E[(T_s)_j]} \quad (\text{Renewal theory})$$

## Ejemplo con dos servicios $(T_Q)_1$

- Quedaría entonces...

$$\rho \cdot \Xi = \rho \left\{ \frac{E[(T_s)_1^2]}{2E[(T_s)_1]} \cdot \frac{\rho_1}{\rho} + \frac{E[(T_s)_2^2]}{2E[(T_s)_2]} \cdot \frac{\rho_2}{\rho} \right\} = \frac{1}{2} \{ \lambda_1 \cdot E[(T_s)_1^2] + \lambda_2 \cdot E[(T_s)_2^2] \}$$

- Con lo que se llegaría a la siguiente expresión...

$$(T_Q)_1 = \frac{\frac{1}{2} \{ \lambda_1 \cdot E[(T_s)_1^2] + \lambda_2 \cdot E[(T_s)_2^2] \}}{1 - \rho_1}$$

## Ejemplo con dos servicios $(T_Q)_2$

- Cuando llega un servicio de tipo 2 al sistema, su tiempo de espera tendrá cuatro contribuciones
  - El tiempo correspondiente a los paquetes de tipo 1 que estuvieran esperando:  $(N_Q)_1 E[(T_s)_1]$
  - Ídem para los paquetes de tipo 2 que estuvieran esperando:  $(N_Q)_2 E[(T_s)_2]$
  - Tiempo que le queda al paquete que esté en el servidor (puede ser de tipo 1 ó 2)
    - tiempo de servicio residual (igual que para los servicios de tipo 1):  $\rho \cdot \Xi$
  - El tiempo correspondiente a los servicios de los paquetes de tipo 1 que pudieran llegar mientras que el servicio objeto de estudio está esperando:  $\lambda_1 (T_Q)_2 E[(T_s)_1]$ , ya que el número de paquetes que llegarían en dicho periodo es  $\lambda_1 (T_Q)_2$

## Ejemplo con dos servicios $(T_Q)_2$

- Se tiene por tanto, que...

$$\begin{aligned} (T_Q)_2 &= (N_Q)_1 E[(T_s)_1] + (N_Q)_2 E[(T_s)_2] + \rho \cdot \Xi + \lambda_1 (T_Q)_2 E[(T_s)_1] = \\ &= (T_Q)_1 \cdot \rho_1 + (T_Q)_2 \cdot \rho_2 + \rho \cdot \Xi + \rho_1 (T_Q)_2 = (T_Q)_2 [\rho_1 + \rho_2] + \rho_1 \frac{\rho \cdot \Xi}{1 - \rho_1} + \rho \cdot \Xi \end{aligned}$$

- Con un poco de álgebra se llega a...

$$(T_Q)_2 [1 - \rho_1 - \rho_2] = \frac{\rho \cdot \Xi}{(1 - \rho_1)} \rightarrow (T_Q)_2 = \frac{\frac{1}{2} \{ \lambda_1 \cdot E[(T_s)_1^2] + \lambda_2 \cdot E[(T_s)_2^2] \}}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

## Generalización para K servicios

- La fórmula anterior se puede generalizar para el caso en el que haya K servicios ( $i=1\dots K$ ), ordenados por prioridad (de mayor a menor)

$$(T_Q)_i = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot E[(T_s)_i^2]}{(1 - \sigma_{i-1})(1 - \sigma_i)}$$

donde  $\sigma_i = \sum_{m=1}^i \rho_m$

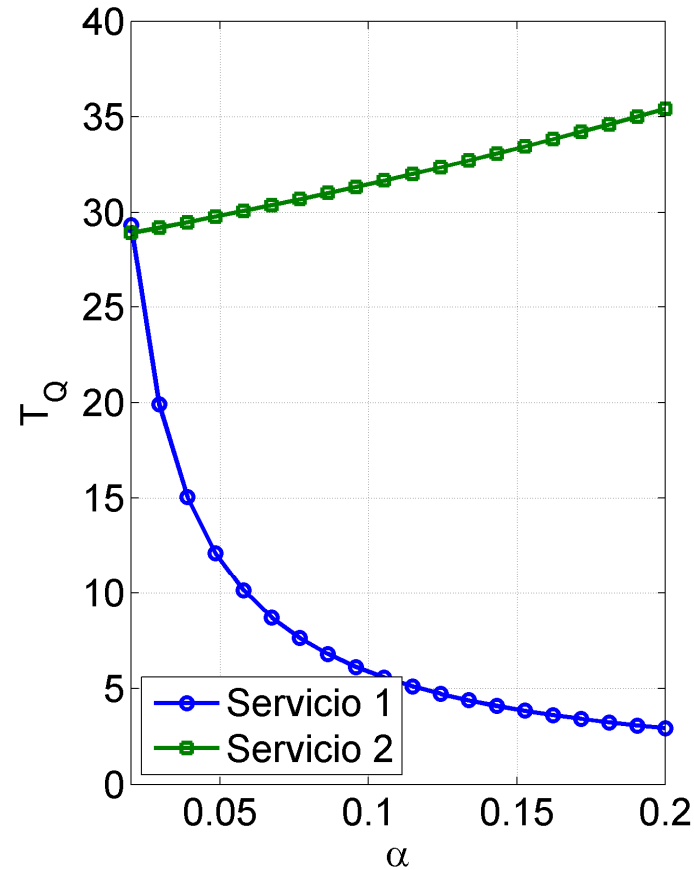
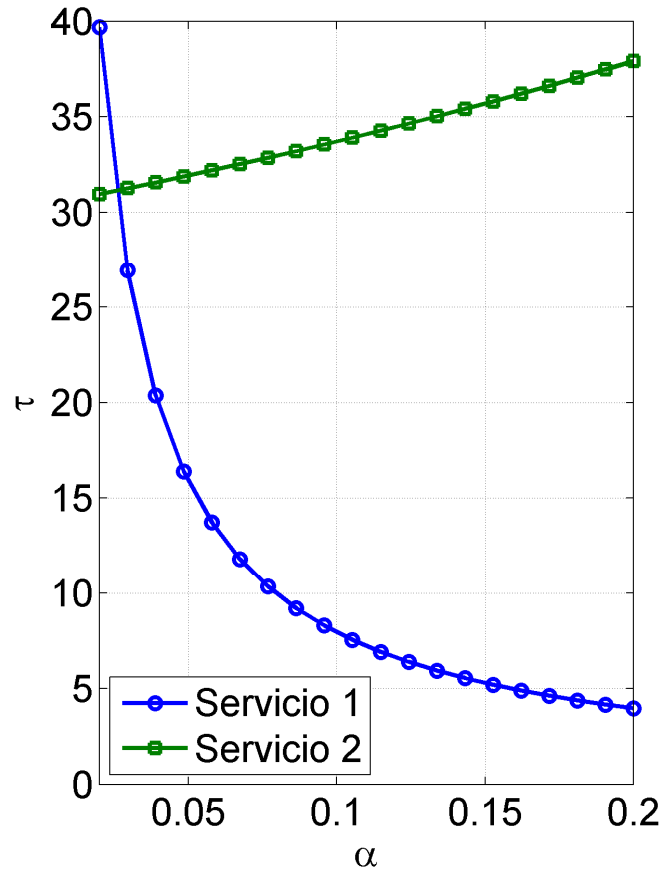
- Notar que el numerador se puede expresar como...

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot E[(T_s)_i^2] = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^K \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot E[(T_s)_i^2]$$

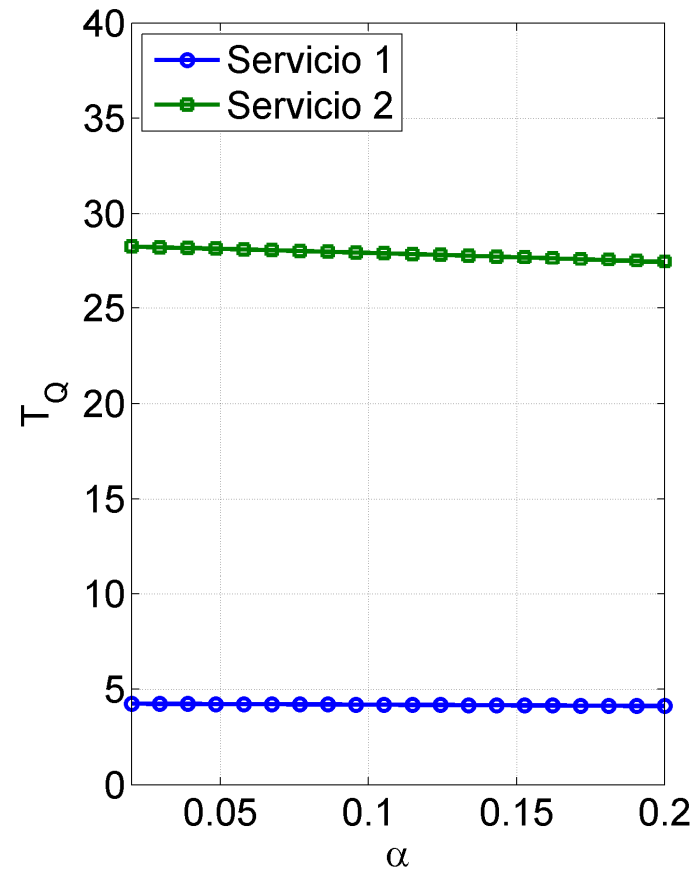
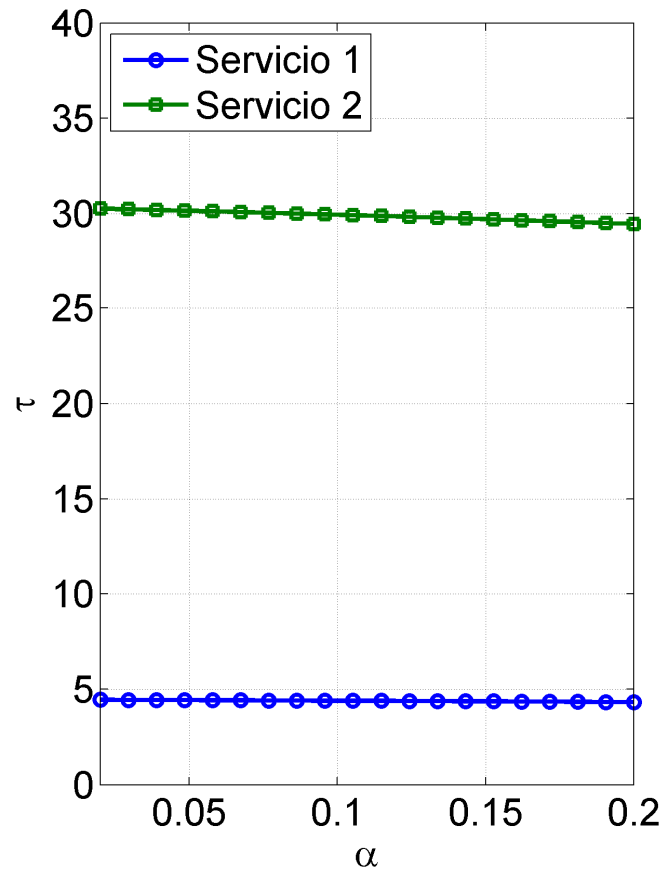
## Ejemplo

- A un nodo de comunicaciones llegan paquetes de dos tipos de servicios (en ambos casos según un proceso de Poisson)
  - VoIP (1) – Longitud fija de 53 Bytes
  - Datos (2) – Longitud media de 512 Bytes, con desviación típica de 1024 Bytes
- La capacidad del enlace es de 2048 kbps
- Se pretende que el tráfico total (factor de utilización –  $\rho$ ) sea inferior a 0.85
- Se asume que el tráfico de voz es  $\alpha \cdot \rho$ , y se “calcula” el tráfico de datos, para mantener  $\rho = 0.85$
- Se utilizan dos esquemas: túneles virtuales (cada servicio tiene un sistema M/G/1 diferente) y un esquema de prioridad (VoIP más prioridad que Datos)

# Resultados – Túneles virtuales



# Resultados – Sistema con prioridad





# Comparativa

- Se representa el cociente entre el rendimiento (QoS) del sistema con prioridad y el que emplea túneles virtuales

