Tema 3 – Teletráfico
Dimensionado de Sistemas

Ramón Agüero Calvo
ramon.agueroc@unican.es

En la elaboración de estos apuntes han contribuido:
Ramón Agüero Calvo, Luis Muñoz Gutiérrez

Contenidos

- Introducción
- Tráfico
- Modelo matemático: proceso de Poisson
- Relación de Little
- Procesos de nacimiento y muerte: teoría de colas
- Dimensionado de sistemas

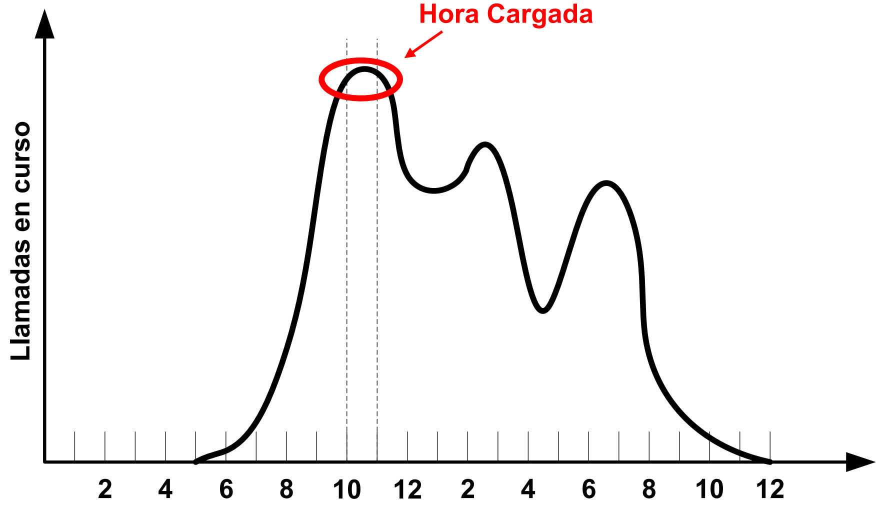
Contenidos

¿Por qué se dimensiona?

- Las operadores buscan ofrecer a sus clientes un servicio adecuado de manera rentable
  - No es razonable proporcionar capacidad atendiendo a demandas puntuales elevadas
  - Ejemplo ilustrativo: se pretende desplegar una red para unir dos poblaciones con 1000 habitantes cada una
    - Se usa una única línea → La solución es muy rentable para el operador, pero el servicio es inaceptable para los usuarios (gran probabilidad de que la línea esté ocupada)
    - Se usan 1000 líneas → Los usuarios estarán muy satisfechos (servicio siempre disponible), pero la solución no es rentable para la compañía
  - Escasez de recursos (por ejemplo en comunicaciones móviles)
- Se suelen emplear modelos matemáticos para llevar a cabo este diseño
  - Líneas de salida en una centralita
  - # de canales en un sistema TDM (conmutación de circuitos)
  - # de operadores en un sistema de atención al cliente
  - También se emplea en otros campos (electrónica…)

Dimensionado de redes de comunicaciones

- Evolución de las llamadas entrantes a una centralita durante un día



- Puede depender de varios factores
  - Localización: zona residencial, de oficinas, etc...
  - Situación temporal: fin de semana, verano, etc...

- Uso de la hora cargada para el dimensionado
  - Uso de recursos en periodos de menor actividad → más económico
  - Se incentiva 'un balanceo' de la carga

Contenidos

¿Qué es el tráfico?

- La intensidad de tráfico (o simplemente, **tráfico**) se define como el número medio de llamadas en curso en un sistema
  - También indica el grado de ocupación de los recursos
- Unidades
  - La más empleada es el ***Erlang***, que es una cantidad adimensional
  - En USA se emplea en ocasiones los ***CCS***, definido como cientos de segundos de llamada por hora
- El tráfico (en Erlangs) de un grupo de circuitos

$$A = \frac{Ch}{T} = \lambda h$$

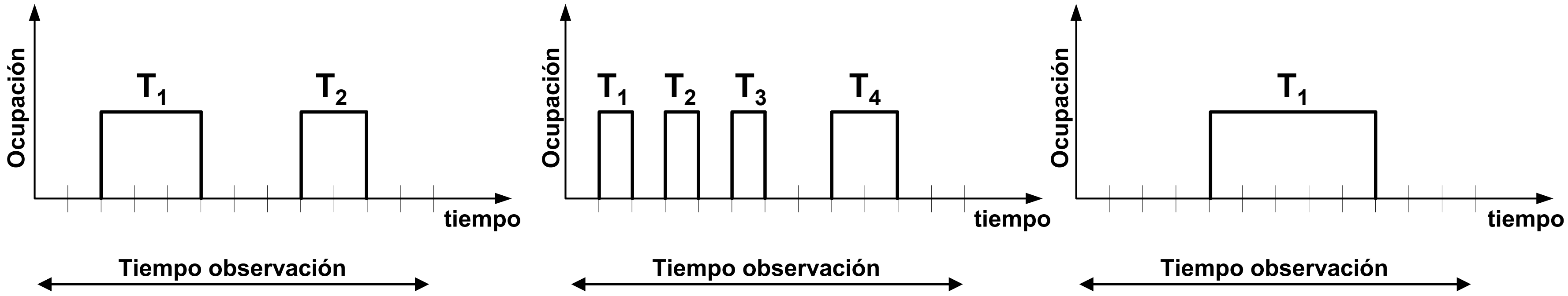
  - C: número de llamadas en T
  - h: duración media (*holding time*)
  - T: tiempo de observación
  - λ: Tasa de llegadas

  - Depende del tiempo de observación
  - Para un único recurso, A ≤ 1

Tipos de tráfico

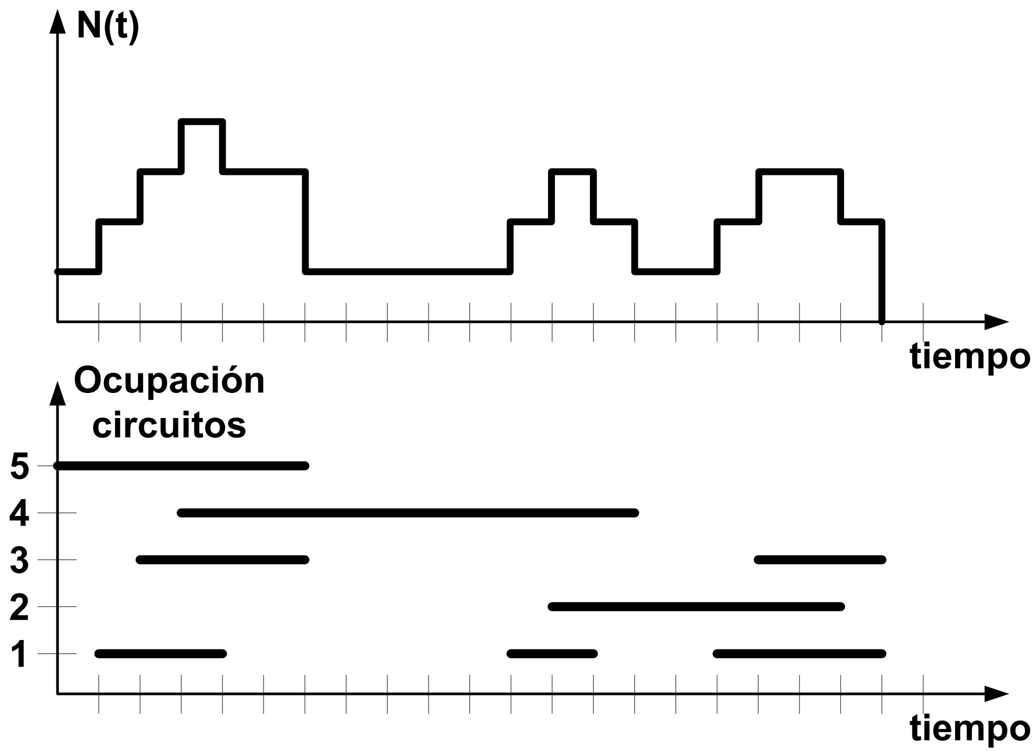
- **Tráfico ofrecido (TO, A, ρ)**
  - Es el volumen de tráfico que se le ofrece a un grupo de circuitos
- **Tráfico cursado (TC, A_C)**
  - Como es inviable dotar de recursos para todos los potenciales usuarios → hay llamadas que no pueden atenderse y se pierden
  - El tráfico cursado viene dado por aquellas peticiones que sí pueden atenderse
  - También se define como el número medio de recursos (circuitos) ocupados
- **Tráfico perdido (TP, A_L)**
  - Conjunto de llegadas que no pueden atenderse y se pierden
  - Especialmente relevante en conmutación de circuitos
  - TP = TO – TC
- **Tráfico en demora/espera (TD, A_D)**
  - En ciertos sistemas las llamadas que no pueden atenderse no se pierden, sino que esperan a que haya recursos libres
  - Se suele emplear en el dimensionado de sistemas de conmutación de paquetes
  - En caso de que la capacidad de almacenamiento sea infinita, no se perdería ninguna llamada (sistema de espera pura)

Tráfico: cuantificación



- Volumen de tráfico: $V_{Tráfico} = \sum_i T_i$
- Intensidad de tráfico (Tráfico): $I_{Tráfico} = \frac{V_{Tráfico}}{T_{obs}} = \frac{\sum_i T_i}{T_{obs}}$
  - Para 1 único circuito da idea del porcentaje de ocupación del mismo (% del tiempo en el que está ocupado)
- En las tres anteriores medidas el tráfico es el mismo
  - Se podría tener en cuenta la sobrecarga debida al mayor número de llamadas

Tráfico: cuantificación



- En el ejemplo de la figura
  - A = 2 Erlangs

- N(t) se define como el total de circuitos ocupados
  - Representa el tráfico instantáneo
  - Su valor medio representa la intensidad de tráfico

$$I_{Tráfico} = \frac{V_{Tráfico}}{T_{obs}} = \frac{1}{T_{obs}} \int_{T_{obs}} N(t)dt$$

- El tráfico también se puede medir a partir de la ocupación individual de los circuitos
  - El volumen total es la suma de los volúmenes individuales

$$I_{Tráfico} = \frac{1}{T_{obs}} \sum_j \left(V_{Tráfico}\right)_{circuito\ j}$$

Grado de Servicio

- El Grado de Servico (*Grade of Service, GoS*) da idea de la "calidad" que perciben los usuarios
- Depende fuertemente del tipo de sistema
  - En sistemas con pérdida, se define como la probabilidad de pérdida (o probabilidad de congestión)
    - Coincide con la probabilidad de que un usuario, al realizar una llamada, se encuentre el sistema sin recursos

$$\mathrm{GoS} = \frac{\text{Llamadas perdidas}}{\text{Llamadas ofrecidas}} \qquad \mathrm{GoS} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TO}}$$

  - En sistemas de demora se suele relacionar con la probabilidad de esperar para disponer de un recurso
    - También se puede definir como el tiempo medio de espera antes de obtener un recurso para cursar la llamada

Contenidos

- Introducción
- Tráfico
- Modelo matemático: proceso de Poisson
- Relación de Little
- Procesos de nacimiento y muerte: teoría de colas
- Dimensionado de sistemas

Introducción

- Habitualmente se utilizan modelos matemáticos que caractericen las llamadas en el sistema
- El proceso de Poisson es uno de los más empleados en el ámbito de las telecomunicaciones
  - También se usa en otros campos: fenómenos electrón/hueco, ruido de “shot”…
- El modelo básico de tráfico que se utilizará viene determinado por las siguientes tres características
  - El número de llegadas en un tiempo determinado sigue una distribución de Poisson
  - La duración de las llamadas sigue una función densidad de probabilidad (fdp) exponencial negativa
  - La tasa de llegadas al sistema es constante (proceso estacionario)

Proceso de Poisson

- Se define un intervalo de tiempo Δt, con $\Delta t \rightarrow 0$
- La probabilidad de que haya una llamada en Δt

$$\Pr\{1\,\text{llegada en }\Delta t\} = \lambda\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad \lambda\,\Delta t << 1$$

- La probabilidad de **no** haya una llamada en Δt

$$\Pr\{0\,\text{llegadas en }\Delta t\} = 1 - \lambda\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad \lambda\,\Delta t << 1$$

- Las llegadas son sin memoria
  - Una llegada en cualquier intervalo Δt es independiente de lo que sucediera en intervalos anteriores o futuros
- Despreciando los términos en $o(\Delta t)$, la probabilidad de que haya más de una llamada en Δt es 0

$$\left.\begin{aligned}\Pr\{1\,\text{llegada en }\Delta t\} &= \lambda\,\Delta t = p\\ \Pr\{0\,\text{llegadas en }\Delta t\} &= 1 - \lambda\,\Delta t = 1 - p = q\end{aligned}\right\}\ \textit{Distribución de Bernouilli}$$

Proceso de Poisson

- Se considera un intervalo T = m Δt, las probabilidades de que llegue una llamada en cada uno de los m intervalos son independientes
- El número total de llegadas en el intervalo T sigue una distribución binomial

$$\Pr\{\text{k llegadas en T}\} = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$$

- Teniendo en cuenta que: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} \underset{m \gg k}{\approx} \frac{m^k}{k!}$

$$\Pr\{\text{k llegadas en T}\} = \frac{m^k}{k!}(\lambda\Delta t)^k (1-\lambda\Delta t)^{m-k} = \frac{(\lambda T)^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda T}{m}\right)^{m-k}$$

- Tomando límites (m → ∞) $\Pr\{\text{k llegadas en T}\} = P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$

Proceso de Poisson: media y varianza

- Valor medio (número medio de llamadas en T)

$$\overline{K_T} = E[P_k(T)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k(T) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda T}}{k!} (\lambda T)^k = \lambda T$$

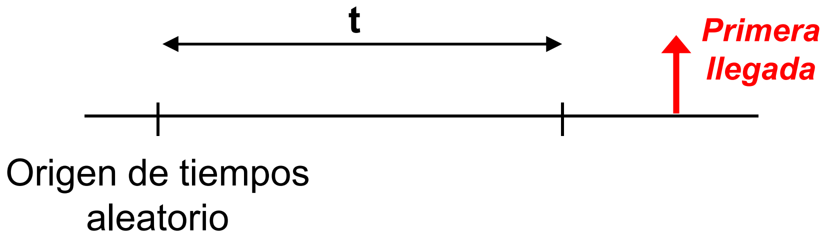
- Varianza

$$\sigma_{K_T}^2 = E[P_K^2(T)] - \left(\overline{K_T}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_k(T) - (\lambda T)^2 = \lambda T$$

- Notar que el cociente entre la varianza y la media es la unidad para el tráfico de Poisson
  - Este parámetro da idea del tipo de tráfico: suave, a ráfagas o aleatorio

Tiempo entre llegadas

- Se define la variable aleatoria τ como el tiempo entre llegadas consecutivas



- La probabilidad de que τ sea mayor que t coincide con la probabilidad de que no se produzcan llegadas en t…

$$\Pr\{\tau > t\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- Luego la función de distribución de la variable aleatoria τ se puede definir como...

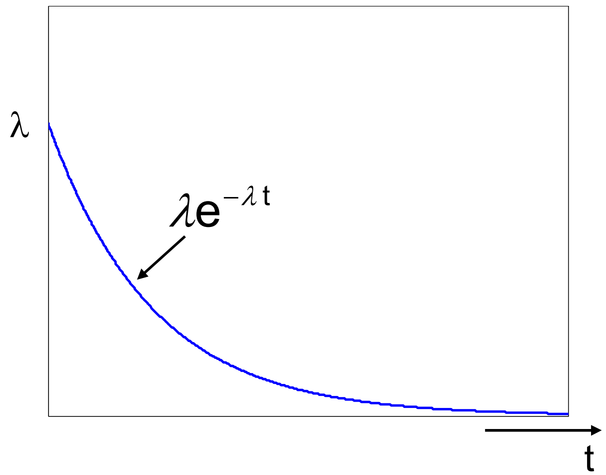
$$F_\tau(t) = \Pr\{\tau \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Y la función densidad de probabilidad se obtiene derivando la anterior…

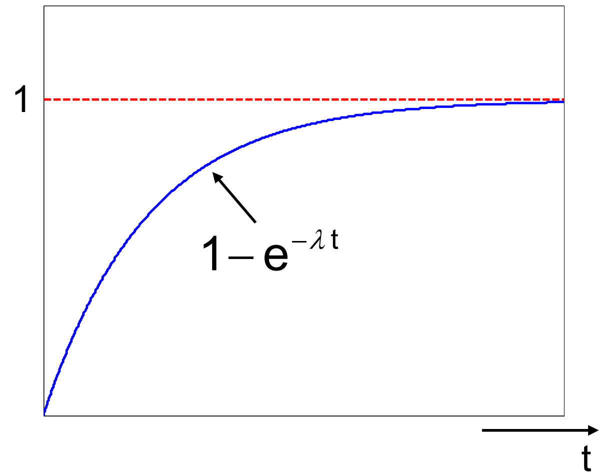
$$f_\tau(t) = \frac{dF_\tau(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

Tiempo entre llegadas

- El proceso de Poisson implica que el tiempo entre llegadas consecutivas sigue una distribución exponencial negativa



Función densidad de probabilidad



Función de distribución de probabilidad

- Media y varianza (distribución exponencial)

$$E(\tau) = \int_0^\infty t \cdot f_\tau(t) dt = \int_0^\infty t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_\tau^2 = \int_0^\infty \left(t - \bar{\tau}\right)^2 f_\tau(t) dt = \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

Tiempo entre llegadas

- La característica más importante de la distribución exponencial es que es '**sin memoria**'
- De esta manera, el 'pasado' en la evolución de la variable no tiene ninguna influencia en los valores futuros
  - Se considera que se ha producido una llegada en t = 0
  - En $t = t_0$ se observa que no se ha producido ninguna llegada aún
  - ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una llegada a partir de t_0 en t?

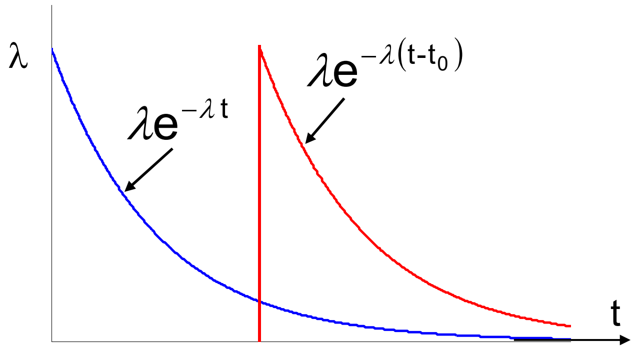
$$\Pr[\tau \le t + t_0 \mid \tau > t_0] = \frac{\Pr[t_0 < \tau \le t + t_0]}{\Pr[\tau > t_0]} = \frac{\Pr[\tau \le t + t_0] - \Pr[\tau < t_0]}{\Pr[\tau > t_0]}$$

$$\Pr[\tau \le t + t_0 \mid \tau > t_0] = \frac{\left(1 - e^{-\lambda(t+t_0)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)} = \frac{e^{-\lambda t_0}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda t}$$

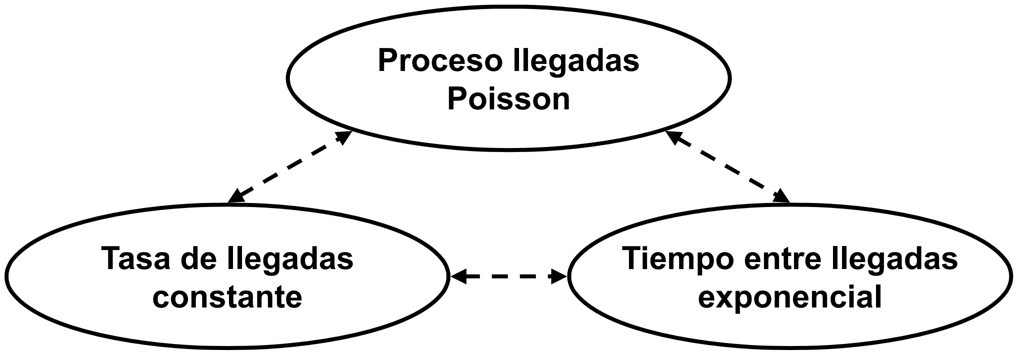
$$\Pr[\tau \le t + t_0 \mid \tau > t_0] = \Pr[\tau \le t]$$

Tiempo entre llegadas

- Propiedad "sin memoria" de la distribución exponencial



- Notar que: $\Pr[\tau \le t+\Delta t \mid \tau > t] = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \left(1 - \lambda\Delta t + \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!} - \dots\right) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$



- Se demuestra que la correspondencia…

Proceso llegadas Poisson

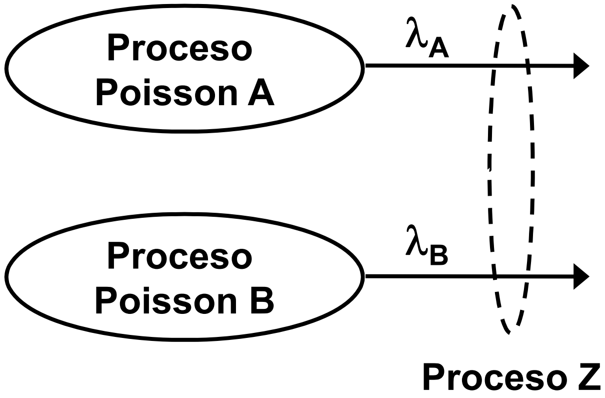
↕

Tiempo entre llegadas exponencial

es cierta en ambos sentidos

Suma de dos procesos de Poisson

- Otra importante característica del proceso de Poisson es que la suma de procesos independientes dan como resultado otro proceso de Poisson



- El tiempo entre llamadas de los procesos A y B siguen distribuciones exponenciales

$$\text{(A)}\quad \Pr[\tau \leq t] = 1 - e^{-\lambda_A t}$$

$$\text{(B)}\quad \Pr[\tau \leq t] = 1 - e^{-\lambda_B t}$$

- Analicemos la probabilidad de que el tiempo entre dos llamadas consecutivas **de cualquier proceso** sea mayor de t

$$\Pr[\tau_Z > t] = \Pr[\tau_A > t, \tau_B > t] \overset{\text{independencia}}{=} \Pr[\tau_A > t] \cdot \Pr[\tau_B > t] =$$

$$= e^{-\lambda_A t} \cdot e^{-\lambda_B t} = e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}$$

Tiempo entre llegadas exponencial, con tasa $\lambda_A + \lambda_B$

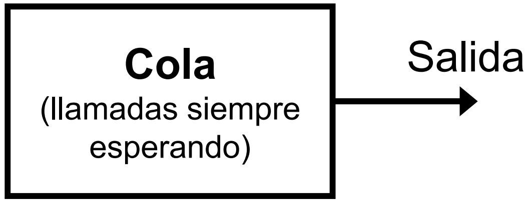
Proceso Z → Poisson con tasa $\lambda_Z = \lambda_A + \lambda_B$

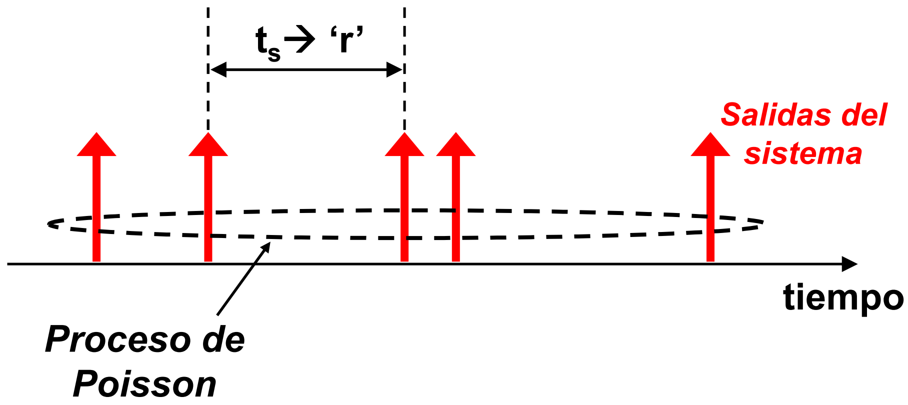
Tiempo de servicio exponencial

- Se ha asumido que el tiempo de servicio (t_s) o duración de las llamadas en el sistema sigue una distribución exponencial, con media $1/\mu$
- Se supone un sistema donde siempre hay llamadas para ser servidas esperando
- La variable aleatoria r (t_s) se modela con una distribución exponencial

$$f_R(r) = \mu e^{-\mu r}$$

- Teniendo en cuenta la correspondencia anterior, la variable aleatoria 'Número de llamadas completadas en un tiempo t' seguirá una distribución de Poisson





Tiempo de servicio exponencial

- Un resultado interesante es la distribución de la variable aleatoria definida como la mínima de variables aleatorias exponenciales (independientes entre sí)
- Se define la va Z como: $Z = \min\{X, Y\}$
- Entonces, su función de distribución será…

independencia

$$F_Z(z) = \Pr\{Z \le z\} = \Pr\{[X \le z] \cup [Y \le z]\} = \Pr\{X \le z\} + \Pr\{Y \le z\} - \Pr\{[X \le z] \cap [Y \le z]\} =$$

$$= \Pr\{X \le z\} + \Pr\{Y \le z\} - \Pr\{X \le z\} \cdot \Pr\{Y \le z\} = \left(1 - e^{-\mu_X z}\right) + \left(1 - e^{-\mu_Y z}\right) -$$

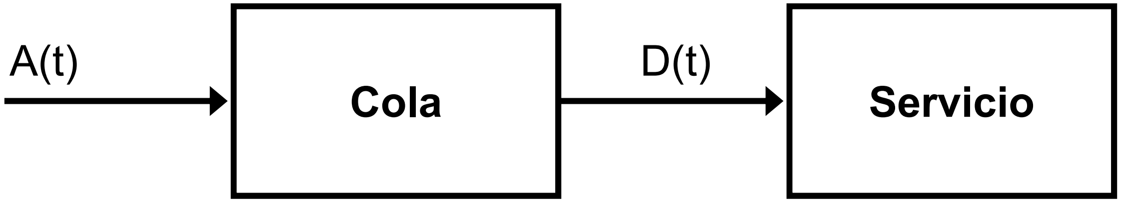
$$- \left(1 - e^{-\mu_X z}\right)\left(1 - e^{-\mu_Y z}\right) = 1 - e^{-(\mu_X + \mu_Y)z}$$

- Z también está distribuida exponencialmente, con media $(\mu_x + \mu_y)^{-1}$

Contenidos

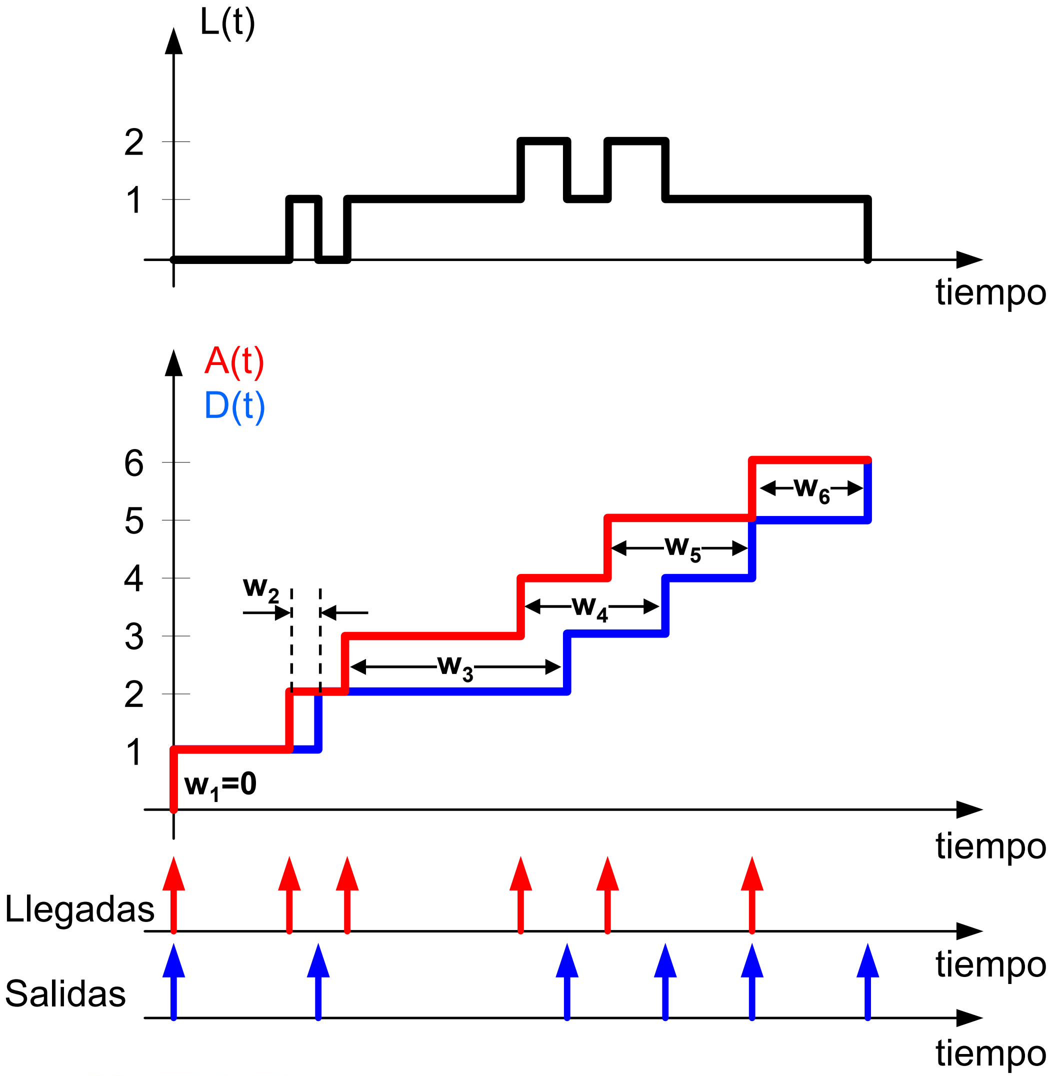
Planteamiento

- Se considera un sistema como sigue:



- Y se definen las siguientes variables
  - A(t): número de llegadas acumuladas al sistema en t
  - D(t): número de salidas acumuladas al sistema en t
  - L(t) = A(t) – D(t), número de elementos en el sistema en tiempo t
  - N(τ) es el número total de llegadas en un intervalo cualquiera τ
- Se asumirá una estrategia FIFO, aunque el resultado es el mismo si se usan otras disciplinas
- Se asume que todas las llamadas serán eventualmente atendidas

Demostración



- Se definen los tiempos de espera de cada llamada en la cola como w_i
- Es fácil ver que…

$$\int_0^{\tau} L(t)dt = \sum_{j=1}^{N(\tau)} w_j$$

- Además, el valor medio de L en el intervalo τ es…

$$\overline{L(\tau)} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} L(t)dt$$

- Y el tiempo medio de espera…

$$\overline{W(\tau)} = \frac{1}{N(\tau)}\sum_{j=1}^{N(\tau)} w_j$$

Demostración

- Por tanto, se puede escribir que…

$$\overline{L(\tau)}\,\tau = \overline{W(\tau)}\,N(\tau) \quad \rightarrow \quad \overline{L(\tau)} = \overline{W(\tau)}\frac{N(\tau)}{\tau}$$

- Definiendo la tasa de entrada al sistema promedio como…

$$\lambda(\tau) = \frac{N(\tau)}{\tau}$$

  se llega al siguiente resultado…

$$\overline{L(\tau)} = \overline{W(\tau)}\,\lambda(\tau)$$

- Si se toman límites y se supone que todas las variables tienden a un valor constante, se llega a la relación de Little: **L = Wλ**
- La relación de Little se puede extender para incluir al elemento que cursa los servicios (*siempre que no haya pérdida de llamadas*)

Contenidos

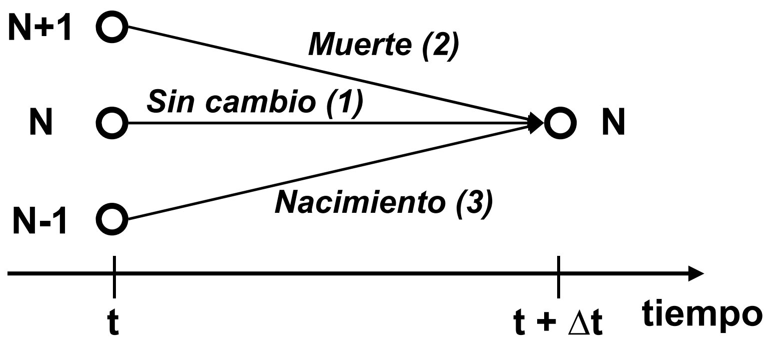
- Introducción
- Tráfico
- Modelo matemático: proceso de Poisson
- Relación de Little
- Procesos de nacimiento y muerte: teoría de colas
- Dimensionado de sistemas

Introducción

- Proceso estocástico: conjunto de variables aleatorias que dependen del tiempo X(t)
- Una cadena de Markov es un proceso estocástico discreto
  - El sistema puede encontrarse en un conjunto de estados
  - El estado, en un instante t_n, sólo depende del estado inmediatamente anterior y no de cómo se llegara a él
  - La evolución futura del sistema sólo depende del estado actual
  - Se suelen representar y analizar a través de las tasas o probabilidades de transición (procesos continuos o discretos en el tiempo, respectivamente)
- Los procesos de nacimiento y muerte son cadenas de Markov en las que sólo es posible pasar de un estado al posterior (***nacimiento***) o al anterior (***muerte***)
- En los problemas de dimensionado se utilizan procesos de nacimiento y muerte, en los que cada estado representa, por ejemplo, el número de clientes en el sistema

Procesos de nacimiento y muerte

- Analicemos las posibles transiciones en un intervalo Δt del estado del sistema



- Calculemos la probabilidad de que en $t+\Delta t$ el sistema esté en el estado N (o que haya N usuarios en el mismo)
- **(1)** En t estaba en el estado 'N'
  - (a) No ha habido ningún nacimiento, ni ninguna muerte en Δt
  - (b) Se ha producido un nacimiento, pero también una muerte en Δt
- **(2)** En t estaba en el estado N+1
  - Ha habido una muerte y no se ha producido ningún nacimiento en Δt
- **(3)** En t estaba en el estado N-1
  - Se ha producido un nacimiento y no ha habido ninguna muerte en Δt

Procesos de nacimiento y muerte

- La tasas de nacimiento y muerte en el estado j serán, respectivamente, λ_j y μ_j
- Luego la probabilidad del estado 'N' en t+ Δt, $P_N(t+\Delta t)$, vendrá dada por:

$$P_N(t+\Delta t) = P_N(t)\left[(1-\lambda_N\Delta t)(1-\mu_N\Delta t)+o(\Delta t)\right]+P_N(t)\left[\lambda_N\Delta t\ \mu_N\Delta t+o(\Delta t)\right]+ \quad \textbf{(1)}$$

$$+P_{N+1}(t)\left[\mu_{N+1}\Delta t(1-\lambda_{N+1}\Delta t)+o(\Delta t)\right]+ \quad \textbf{(2)}$$

$$+P_{N-1}(t)\left[\lambda_{N-1}\Delta t(1-\mu_{N-1}\Delta t)+o(\Delta t)\right] \quad \textbf{(3)}$$

- Despreciando términos en o(Δt)…

$$P_N(t+\Delta t) = P_N(t)\left[1-(\lambda_N+\mu_N)\Delta t\right]+P_{N+1}(t)\left[\mu_{N+1}\Delta t\right]+P_{N-1}(t)\left[\lambda_{N-1}\Delta t\right]$$

$$P_N(t+\Delta t)-P_N(t) = \left\{-P_N(t)\left[(\lambda_N+\mu_N)\right]+P_{N+1}(t)\left[\mu_{N+1}\right]+P_{N-1}(t)\left[\lambda_{N-1}\right]\right\}\Delta t$$

$$\frac{P_N(t+\Delta t)-P_N(t)}{\Delta t} = -P_N(t)\left[(\lambda_N+\mu_N)\right]+P_{N+1}(t)\left[\mu_{N+1}\right]+P_{N-1}(t)\left[\lambda_{N-1}\right]$$

Procesos de nacimiento y muerte

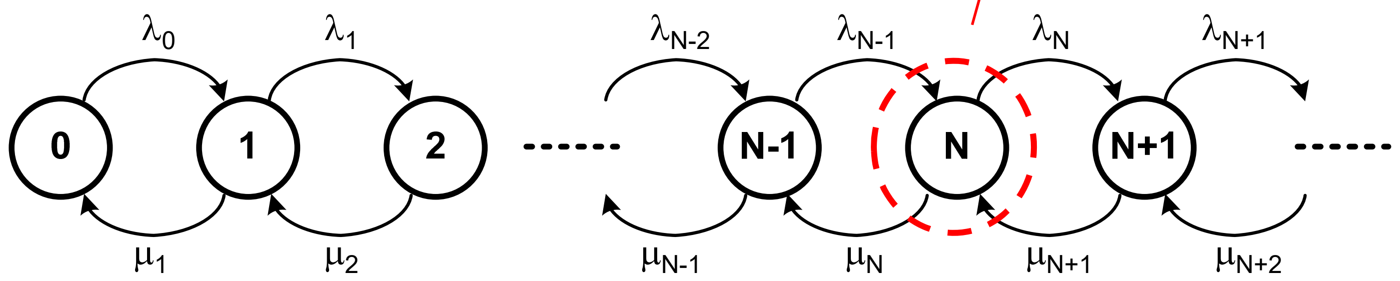
- Recordemos la definición de derivada…

$$P'_N(t) = \frac{P_N(t+\Delta t) - P_N(t)}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad P'_N(t) = -(\lambda_N + \mu_N)P_N(t) + \mu_{N+1}P_{N+1}(t) + \lambda_{N-1}P_{N-1}(t)$$

- Si asumimos que estamos en el régimen estacionario, $P_N(t)$ es constante (P_N), por lo que la derivada, $P'_N(t)$, es cero
- Se tiene finalmente que…

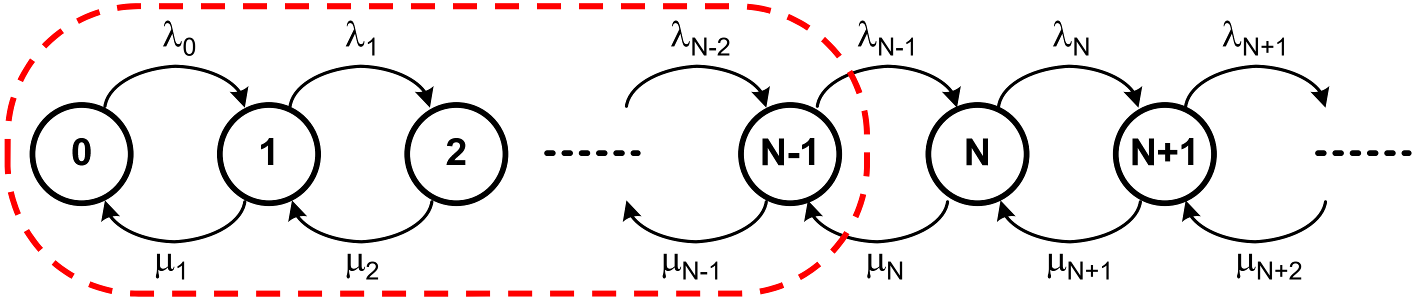
$$(\lambda_N + \mu_N)P_N = \mu_{N+1}P_{N+1} + \lambda_{N-1}P_{N-1}$$

Ecuación de Equilibrio
(flujo de salida = flujo de entrada)



Proceso de nacimiento y muerte

- Se pueden utilizar otras ecuaciones de balance…



$$\mu_N P_N = \lambda_{N-1} P_{N-1} \quad \rightarrow \quad P_N = \frac{\lambda_{N-1}}{\mu_N} P_{N-1}$$

- Sucesivamente podríamos llegar a $P_N = P_0 \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$

- Además se requiere que la suma de todas las probabilidades sea 1

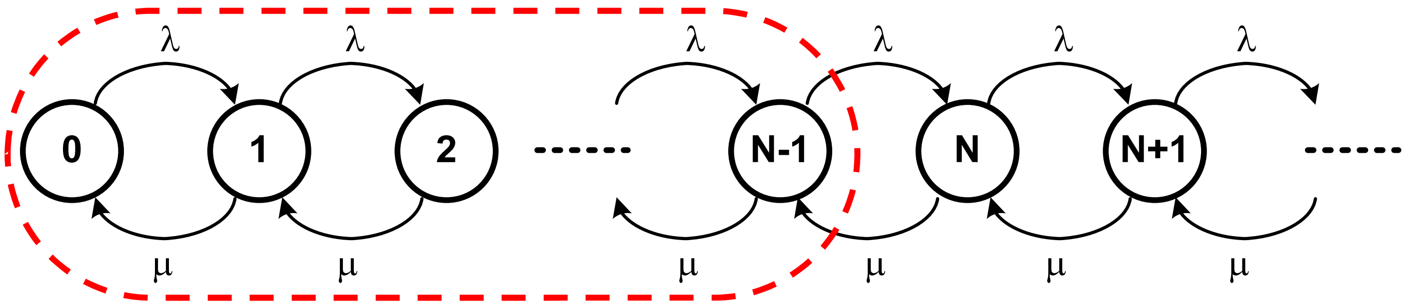
$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \quad \rightarrow \quad P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = 1 \quad \rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Aplicación al dimensionado de sistemas

- A partir de las probabilidades de estar en cada estado se derivan los parámetros necesarios para caracterizar el sistema
- Cada sistema en particular viene definido por las tasas de nacimiento y muerte de cada estado y por otros parámetros adicionales
- Se emplea la notación de Kendall (A/B/C/D/E/F)
  - A: Distribución de llegadas al sistema
    - Cuando se trata de un proceso de Poisson, se utiliza la letra M (*memoryless*)
  - B: Distribución de los servicios
    - Si es una variable aleatoria exponencial, también se emplea la letra M (*memoryless*)
  - C: Número de servidores (recursos) disponibles
  - D: Número de clientes/servicios que puede haber en el sistema, tanto en los recursos como en espera (si no se indica se asume que es ∞)
    - La diferencia entre D y C coincide con la capacidad del subsistema de espera
    - Cuando es ∞, se trata de un sistema de espera pura (no hay pérdida)
  - E: Número de fuentes (si no se indica se asume que es ∞)
  - F: Disciplina de la cola (si no se indica se asume FIFO)

Sistema M/M/1

- Se trata de un sistema en el que...
  - Las llamadas siguen un proceso de Poisson de intensidad λ
  - La distribución del tiempo de servicio es exponencial, con media $1/\mu$
  - Sólo hay un único servidor para atender las peticiones
  - La cola de espera es infinita, así que no hay pérdida
- Para plantear el diagrama de estados…
  - La tasa de nacimiento no depende del estado actual (Proceso de Poisson)
  - Como sólo hay un único servidor, la tasa de muerte será la misma para todos los estados (μ)



Sistema M/M/1

- Planteando la ecuación de equilibrio y asumiendo que el tráfico es $\rho=\lambda/\mu$…

$$\mu P_N = \lambda P_{N-1} \quad \rightarrow \quad P_N = \frac{\lambda}{\mu} P_{N-1} = \rho P_{N-1} = \rho^2 P_{N-2} = \ldots = \rho^N P_0$$

- Además la suma de las probabilidades de estar en cada estado tiene que ser la unidad…

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_0 \rho^k = 1 \quad \rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k} = 1 - \rho$$

$\rho < 1$

- Con lo que finalmente se obtiene la probabilidad de cada uno de los estados que forman parte de la cola

$$P_N = \rho^N (1 - \rho)$$

Sistema M/M/1

- A partir de dicho resultado se puede caracterizar el sistema…
  - Número medio de clientes en el sistema

$$\overline{N_T} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k-1} = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\right) =$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

  - Número medio de clientes en la cola

$$\overline{N_w} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P_k = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\rho^k(1-\rho) = \sum_{t=0}^{\infty} t\rho^{t+1}(1-\rho) = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

  - Tiempo medio en el sistema y en la cola, aplicando la relación de Little

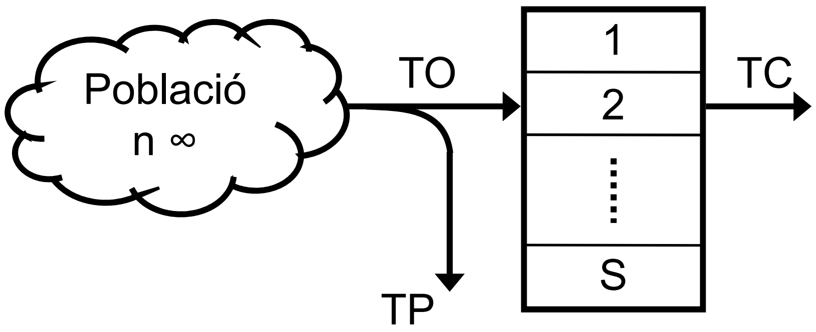
$$\left.\begin{aligned} \overline{W_T} &= \frac{\overline{N_T}}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \\ \overline{W_W} &= \frac{\overline{N_W}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} \end{aligned}\right\} \overline{W_S} = \overline{W_T} - \overline{W_W} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

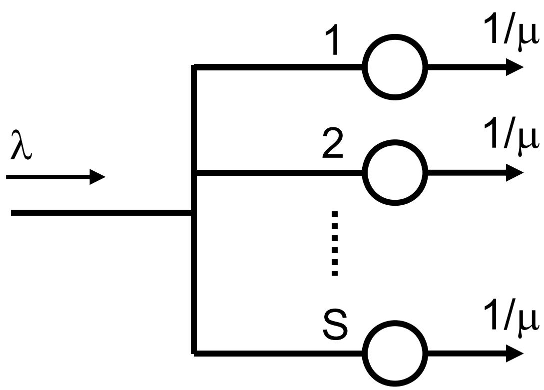
Contenidos

- Introducción
- Tráfico
- Modelo matemático: proceso de Poisson
- Relación de Little
- Procesos de nacimiento y muerte: teoría de colas
- Dimensionado de sistemas

Sistema con pérdidas: M/M/S/S

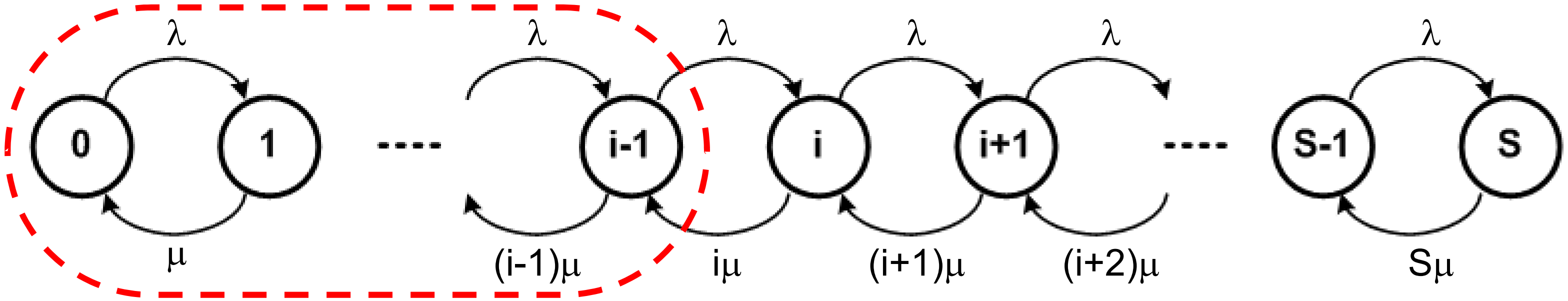
- Se dispone de una población infinita que genera llamadas
  - Tasa de llamadas constante (λ) → Proceso de Poisson
- Las llamadas son cursadas por un grupo de S circuitos
- No hay sistema de espera
  - Cuando una llamada entrante encuentra todos los circuitos ocupados se pierde
- Se supone que la duración de cada llamada sigue una distribución exponencial negativa, con media $1/\mu$





Sistema con pérdidas: M/M/S/S

- En este caso el número de estados en el sistema es finito (S)
  - La tasa de nacimiento es constante (proceso de Poisson y población infinita)
  - La tasa de muerte de cada estado es k·μ (ya que en cada estado puede finalizar cualquiera de las k llamadas en curso)



$$i\mu P_i = \lambda P_{i-1} \quad \rightarrow \quad P_i = \frac{\lambda}{i\mu}P_{i-1} = \frac{A}{i}P_{i-1} = \cdots\cdots = \frac{A^2}{i(i-1)}P_{i-2} = \cdots\cdots = \frac{A^i}{i!}P_0$$

$$(i-1)\mu P_{i-1} = \lambda P_{i-2} \quad \rightarrow \quad P_{i-1} = \frac{\lambda}{(i-1)\mu}P_{i-2} = \frac{A}{i-1}P_{i-2}$$

Sistema con pérdidas: M/M/S/S

- Luego la probabilidad de estar en cada estado será…

$$\sum_{k=0}^{S} P_k = 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{S} P_0 \frac{A^k}{k!} = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{S} \frac{A^k}{k!}} \qquad P_i = \frac{\frac{A^i}{i!}}{\sum_{k=0}^{S} \frac{A^k}{k!}}$$

- La probabilidad de bloqueo es la probabilidad de que una llamada entrante se encuentre el sistema ocupado (P_S)

*Fórmula "**Erlang-B**"*
EB(S,A)

$$PB = P_S = \frac{\frac{A^S}{S!}}{\sum_{k=0}^{S} \frac{A^k}{k!}}$$

- Número medio unidades en el sistema (coincide con el tráfico cursado)

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{S} kP_k = \sum_{k=0}^{S} k \frac{A^k / k!}{\sum_{j=0}^{S} A^j / j!} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{S} A^j / j!} \sum_{k=1}^{S} \frac{A^k}{(k-1)!} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{S} A^j / j!} \sum_{t=0}^{S-1} \frac{A^{t+1}}{t!} = \frac{A}{\sum_{j=0}^{S} A^j / j!} \left[\sum_{t=0}^{S} \frac{A^t}{t!} - \frac{A^S}{S!} \right] = A(1-PB)$$

Sistema con pérdidas: M/M/S/S

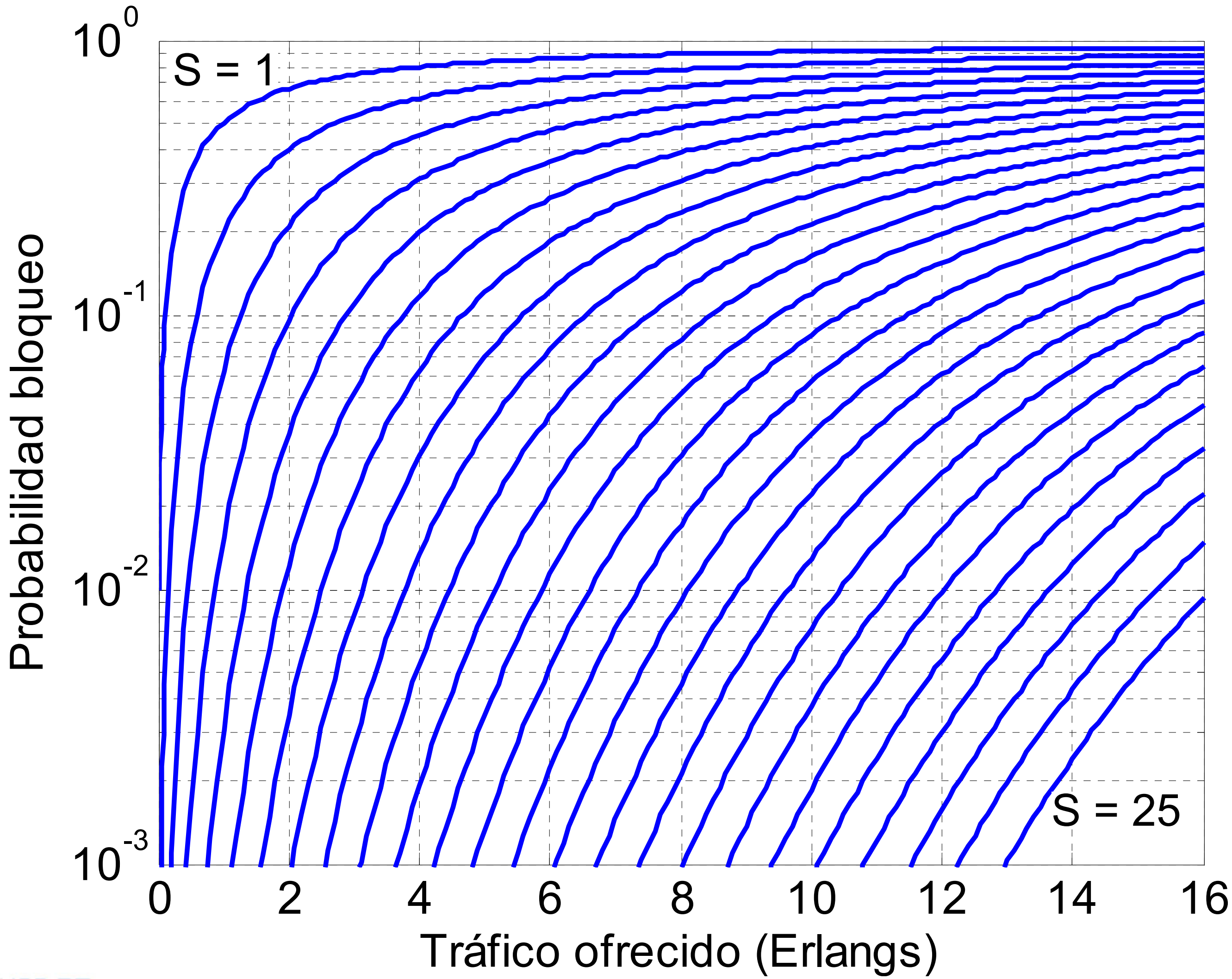
- Como es un sistema con pérdidas, la relación de Little no se puede aplicar directamente
  - Uso de la tasa de llegadas *cursada*
- La fórmula de Erlang-B se emplea a través de gráficas y tablas, aunque se puede resolver recursivamente

$$EB(S,A)=\frac{\frac{A^S}{S!}}{\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!}} \rightarrow \frac{1}{EB(S,A)}=\frac{S!}{A^S}\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!} \qquad \frac{1}{EB(S-1,A)}=\frac{(S-1)!}{A^{S-1}}\sum_{k=0}^{S-1}\frac{A^k}{k!}$$

$$\frac{1}{EB(S,A)}=\frac{S!}{A^S}\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!}=\frac{S!}{A^S}\left\{\sum_{k=0}^{S-1}\frac{A^k}{k!}+\frac{A^S}{S!}\right\}=\frac{S}{A}\frac{(S-1)!}{A^{S-1}}\sum_{k=0}^{S-1}\frac{A^k}{k!}+1=\frac{S}{A}\frac{1}{EB(S-1,A)}+1$$

$$\frac{1}{EB(S,A)}=\frac{S+A\cdot EB(S-1,A)}{A\cdot EB(S-1,A)} \rightarrow EB(S,A)=\frac{A\cdot EB(S-1,A)}{S+A\cdot EB(S-1,A)}$$

Sistema con pérdidas: M/M/S/S



Sistema con pérdidas: M/M/S/S

- Uso de las Tablas de Erlang: PB = EB(S,A)
  - Se buscan el tráfico ofrecido (A) y el número de recursos (S) (e.g. A = 11, S = 13)
  - El valor decimal de la PB vendrá dado por la cifra correspondiente en la tabla (e.g. **PB = 0.118515**)

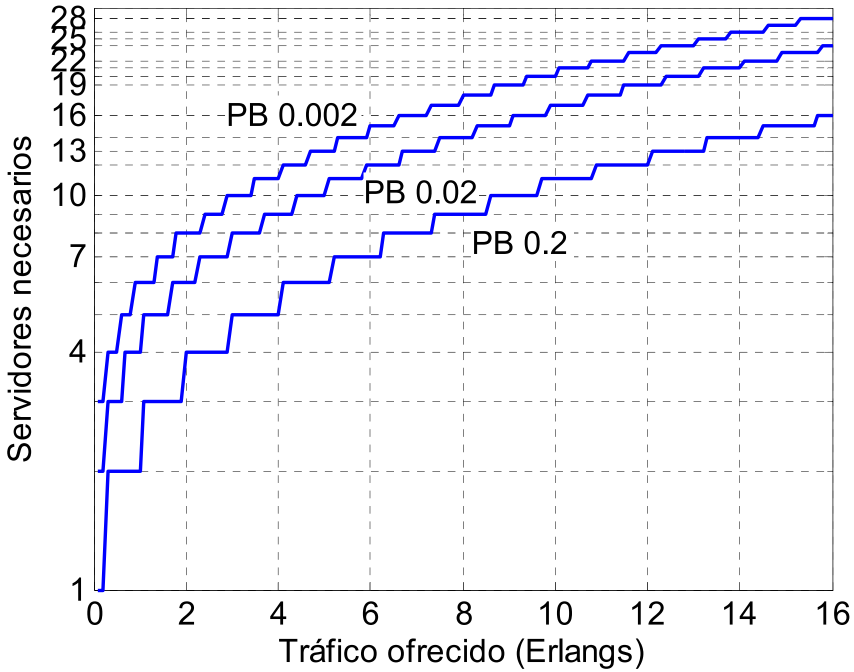
Recursos (S)

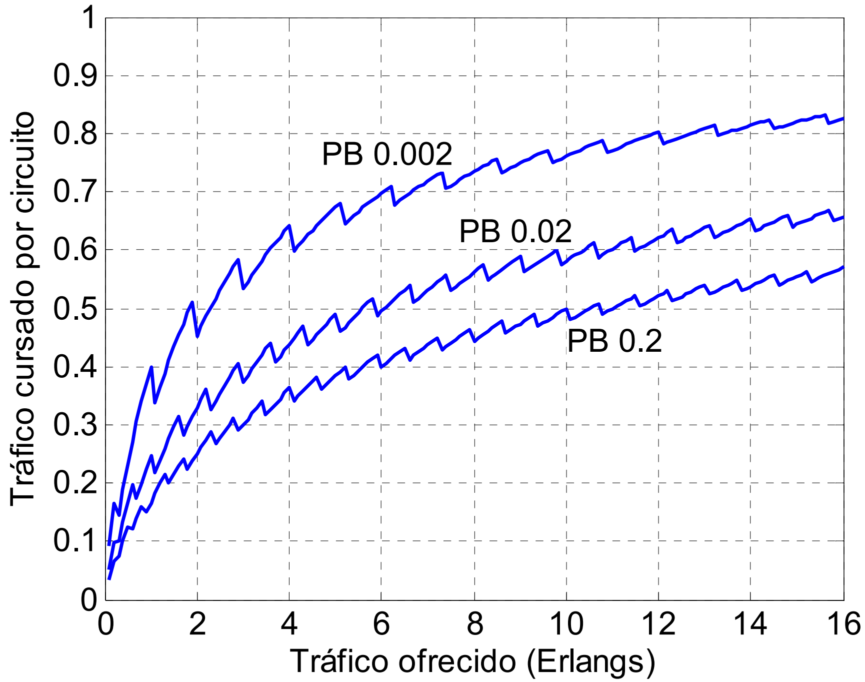
Tráfico Ofrecido (A)

	11	**12**	**13**	**14**	**15**
10.2	171831	127442	090903	062116	040527
10.4	180429	135226	097620	067615	044780
10.6	189012	143073	104472	073302	049249
10.8	197568	150967	111442	079164	053924
11.0	206085	158894	$\boxed{118515}$	085186	058797
11.2	214553	166840	125675	091355	063856
11.4	222963	174791	132907	097655	069090
11.6	231306	182737	140197	104074	074489
11.8	239576	190665	147533	110596	080039
12.0	247766	198567	154901	117210	085729
12.2	255870	206434	162290	123901	091548

Sistema con pérdidas: M/M/S/S

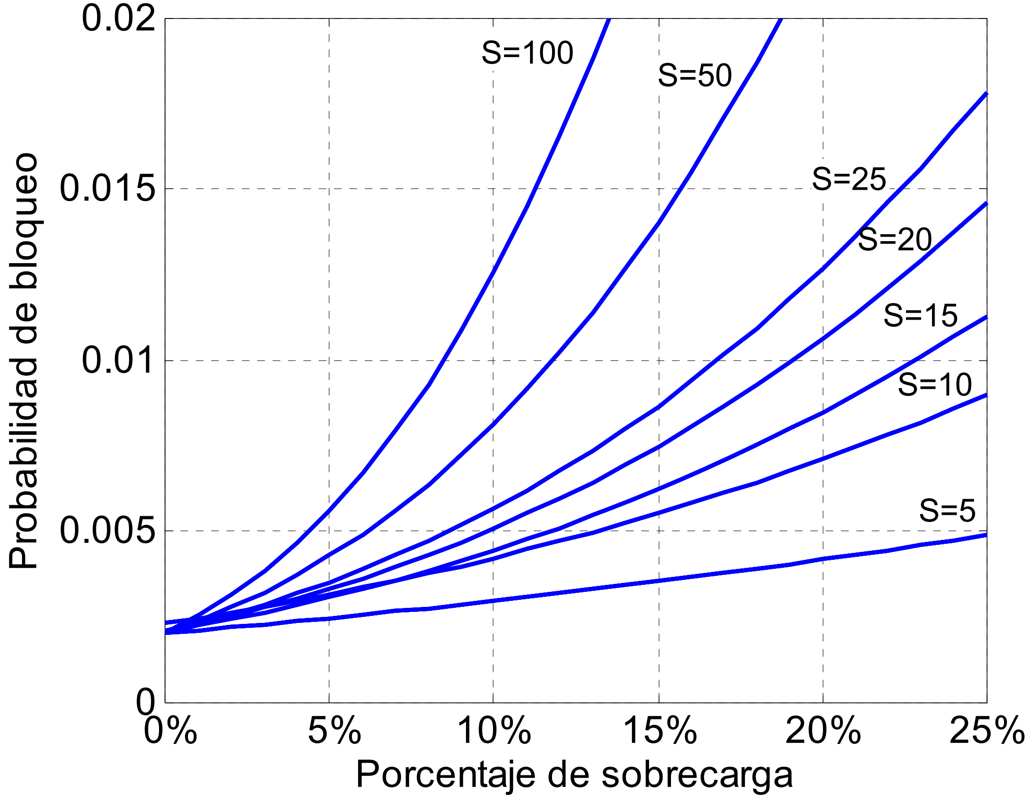
- El GoS se asocia a la probabilidad de pérdida (PB)
  - Para la misma ocupación de circuitos, la probabilidad de encontrar todos ocupados es menor a medida que crece el número de circuitos
  - Para una GoS constante, la eficiencia por circuito crece con el TO
  - Es mejor concentrar el tráfico en un solo grupo, que dividirlo en varios





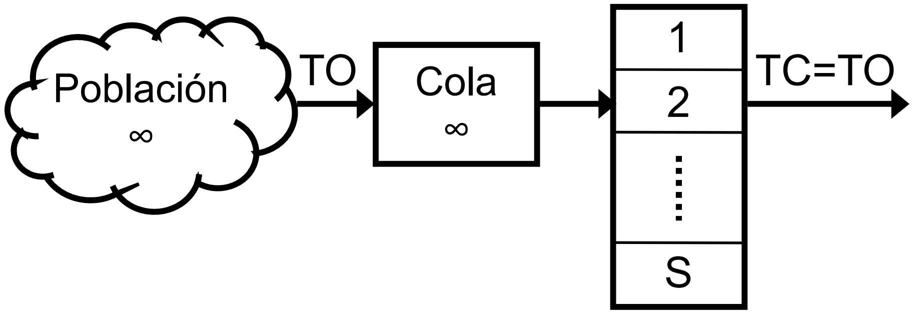
Sistema con pérdidas: M/M/S/S

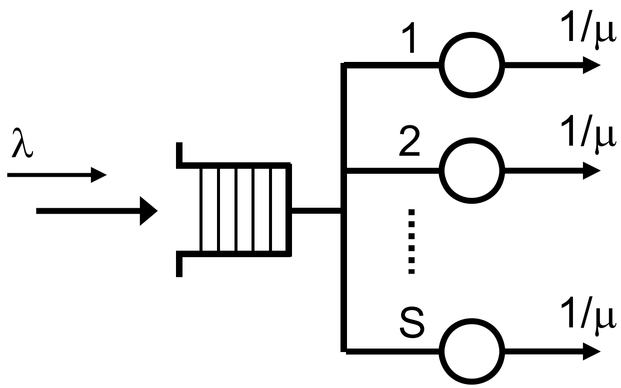
- Deterioro del GoS frente a % de sobrecarga
  - Se puede ver que afecta en mayor medida a los grupos de circuitos grandes
  - Se especifican dos criterios de diseño: uno para carga normal y otro para cierto nivel de sobrecarga



Sistema de espera pura: M/M/S

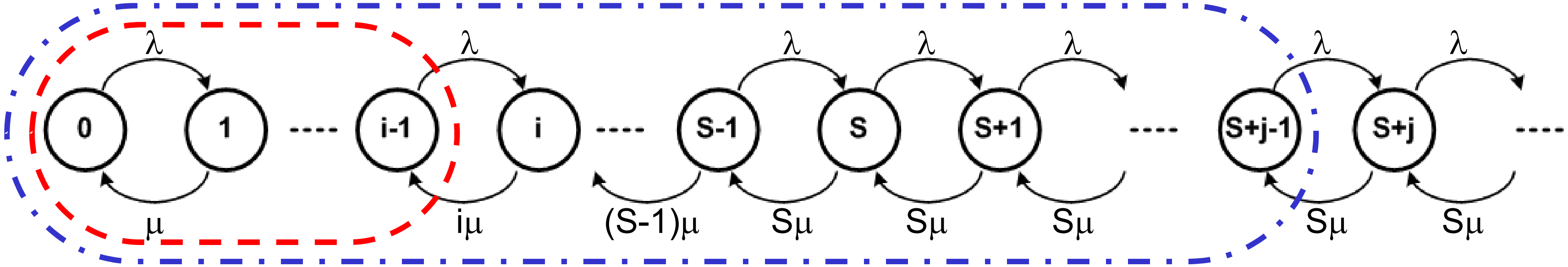
- Se dispone de una población infinita que genera llamadas
  - Tasa de llamadas constante (λ) → Proceso de Poisson
- Las llamadas son cursadas por un grupo de S circuitos
- Se asume que hay sistema de espera (con longitud infinita)
  - Cuando una llamada entrante encuentra todos los circuitos ocupados espera hasta que quede alguno libre
- Se supone que la duración de cada llamada sigue una distribución exponencial negativa, con media $1/\mu$





Sistema de espera pura: M/M/S

- En este caso el número de estados en el sistema es infinito
  - La tasa de nacimiento es constante (proceso de Poisson y población infinita)
  - La tasa de muerte de cada estado es $k \cdot \mu$ hasta el estado S, ya que puede finalizar cualquiera de las k llamadas en curso
  - A partir del estado S, la tasa de muerte es $S \cdot \mu$, ya que sólo hay S llamadas en curso (el resto están esperando)



- Para i ≤ S (no se está en el subsistema de espera)

$$i\mu P_i = \lambda P_{i-1} \quad \rightarrow \quad P_i = \frac{\lambda}{i\mu} P_{i-1} = \frac{A}{i} P_{i-1} = \cdots\cdots = \frac{A^2}{i(i-1)} P_{i-2} = \cdots\cdots = \frac{A^i}{i!} P_0$$

$$(i-1)\mu P_{i-1} = \lambda P_{i-2} \quad \rightarrow \quad P_{i-1} = \frac{\lambda}{(i-1)\mu} P_{i-2} = \frac{A}{i-1} P_{i-2}$$

Sistema de espera pura: M/M/S

- Para i > S (subsistema de espera)

$$S\mu P_{S+j} = \lambda P_{S+j-1} \quad \rightarrow \quad P_{S+j} = \frac{\lambda}{S\mu} P_{S+j-1} = \frac{A}{S} P_{S+j-1} = \cdots\cdots = \frac{A^2}{S^2} P_{S+j-2} = \cdots\cdots = \frac{A^j}{S^j} P_S$$

$$S\mu P_{S+j-1} = \lambda P_{S+j-2} \quad \rightarrow \quad P_{S+j-1} = \frac{\lambda}{S\mu} P_{S+j-2} = \frac{A}{S} P_{S+j-2}$$

- Como S+j = i…

$$P_i = \frac{A^{i-S}}{S^{i-S}} P_S = \left\{ P_S = \frac{A^S}{S!} P_0 \right\} = \frac{A^{i-S}}{S^{i-S}} \frac{A^S}{S!} P_0 = \frac{A^i}{S!S^{i-S}} P_0$$

- Luego…

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{A^i}{i!} P_0 & i \le S \\ \dfrac{A^i}{S!} \dfrac{1}{S^{i-S}} P_0 & i > S \end{cases}$$

Sistema de espera pura: M/M/S

- Como la suma de todas las probabilidades tiene que ser 1…

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{S} P_0 \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=S+1}^{\infty} P_0 \frac{A^k}{S!}\frac{1}{S^{k-S}} = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!} + \frac{A^S}{S!}\frac{A/S}{1-A/S}}$$

$$\sum_{k=S+1}^{\infty} \frac{A^k}{S!}\frac{1}{S^{k-S}} = \sum_{k=S+1}^{\infty}\left(\frac{A}{S}\right)^{k-S}\frac{A^S}{S!} = \frac{A^S}{S!}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{A}{S}\right)^{t+1} \overset{A<S}{=} \frac{A^S}{S!}\frac{A/S}{1-A/S}$$

- Tenemos finalmente que…

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{A^i}{i!}\dfrac{1}{\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!} + \frac{A^S}{S!}\frac{A}{S-A}} & i \le S \\[2ex] \dfrac{A^i}{S!}\dfrac{1}{S^{i-S}}\dfrac{1}{\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!} + \frac{A^S}{S!}\frac{A}{S-A}} & i > S \end{cases}$$

Sistema de espera pura: M/M/S

- ¿Cuál es la probabilidad de esperar (PD)?

$$PD = \sum_{k=S}^{\infty} P_k = \sum_{k=S}^{\infty} P_0 \frac{A^S}{S!}\left(\frac{A}{S}\right)^{k-S} = P_0 \frac{A^S}{S!}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{A}{S}\right)^{t} =$$

$$= P_0 \frac{A^S}{S!}\frac{S}{S-A} = \frac{\dfrac{A^S}{S!}\dfrac{S}{S-A}}{\sum_{k=0}^{S}\dfrac{A^k}{k!} + \dfrac{A^S}{S!}\dfrac{A}{S-A}}$$

*Fórmula “**Erlang-C**”*
EC(S,A)

- Número medio de unidades en la cola…

$$\overline{N_W} = \sum_{k=S}^{\infty}(k-S)P_k = P_0\sum_{k=S}^{\infty}(k-S)\frac{A^S}{S!}\left(\frac{A}{S}\right)^{k-S} = P_0\frac{A^S}{S!}\sum_{t=0}^{\infty}t\left(\frac{A}{S}\right)^{t} = P_0\frac{A^S}{S!}\frac{A}{S}\sum_{t=0}^{\infty}t\left(\frac{A}{S}\right)^{t-1} =$$

$$= P_0\frac{A^S}{S!}\frac{A}{S}\frac{d}{d(A/S)}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{A}{S}\right)^{t} = P_0\frac{A^S}{S!}\frac{A}{S}\frac{d}{d(A/S)}\left(\frac{1}{1-A/S}\right) = P_0\frac{A^S}{S!}\frac{A}{S}\frac{1}{\left(1-A/S\right)^2} = EC(S,A)\frac{A}{S-A}$$

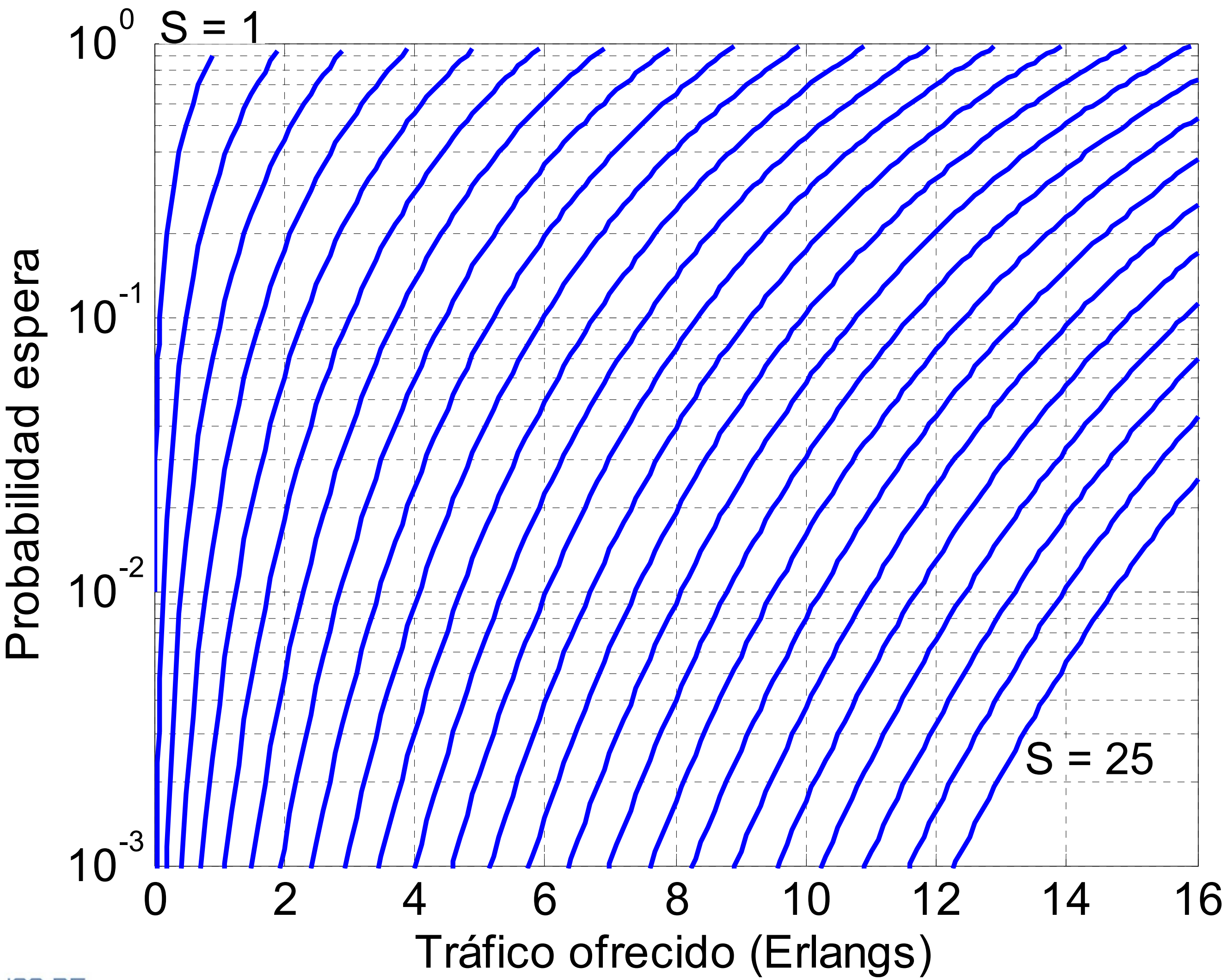
Sistema de espera pura: M/M/S

- La fórmula de Erlang-C se puede relacionar con la de Erlang-B
  - Para evitar tener que realizar factoriales, se puede resolver la de Erlang-B de manera recursiva y utilizar esta relación para resolver la fórmula de Erlang-C computacionalmente

$$EC(S,A) = \frac{\frac{A^S}{S!}\frac{S}{S-A}}{\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!} + \frac{A^S}{S!}\frac{A}{S-A}} = \frac{S}{\boxed{\frac{\sum_{k=0}^{S}\frac{A^k}{k!}}{A^S/S!}}(S-A)+A} = \frac{S}{\boxed{\frac{1}{EB(S,A)}}(S-A)+A} =$$

$$= \frac{S\cdot EB(S,A)}{S-A+A\cdot EB(S,A)} = \frac{S\cdot EB(S,A)}{S-A(1-EB(S,A))}$$

Sistema de espera pura: M/M/S



Sistema de espera pura: M/M/S

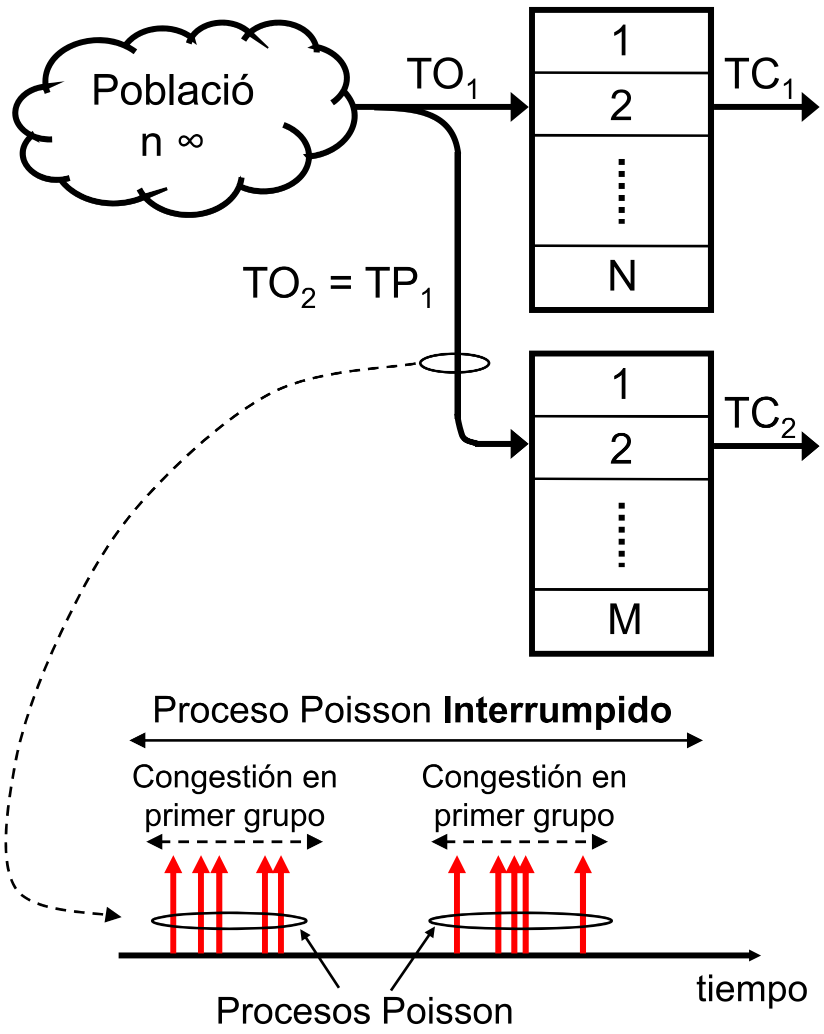
- En un sistema de espera pura, la calidad de servicio viene dada por la probabilidad de esperar o por el tiempo de espera
- Aplicando la relación de Little se puede obtener el tiempo medio de espera en la cola

$$\overline{W_W} = \frac{\overline{N_W}}{\lambda} = EC(S,A)\frac{A}{S-A}\frac{1}{\lambda} = EC(S,A)\frac{1}{\mu(S-A)}$$

- También se podría emplear la probabilidad de que el tiempo de estancia en la cola de espera fuera mayor de un cierto límite

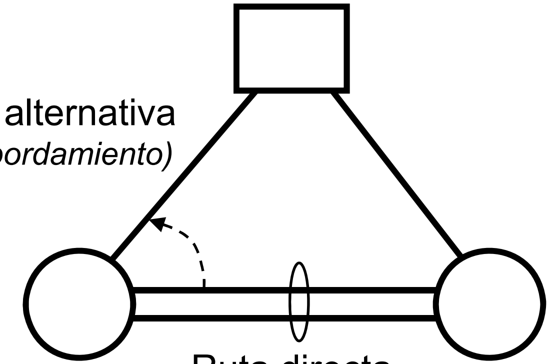
$$\Pr\{\text{Retardo} > \tau\} = \underbrace{e^{-\mu(S-A)\tau}}_{\Pr\{\text{Retardo} > \tau \mid \text{Retardo} > 0\}} \underbrace{EC(S,A)}_{\Pr\{\text{Retardo} > 0\}}$$

Sistemas con desbordamiento



- El modelo que se plantea es una población infinita, ofreciendo un tráfico de Poisson a un grupo de circuitos de primera elección
- El tráfico perdido **(desbordado)** por este primer grupo de circuitos, se ofrece a un segundo grupo de circuitos
- El tráfico desbordado NO es un proceso de Poisson
  - Las llamadas no son aleatorias completamente
  - Cuando una llamada encuentra el primer grupo completo, es más probable que la siguiente llamada también lo haga
  - Se trata de un proceso de Poisson **INTERRUMPIDO**

Sistemas con desbordamiento

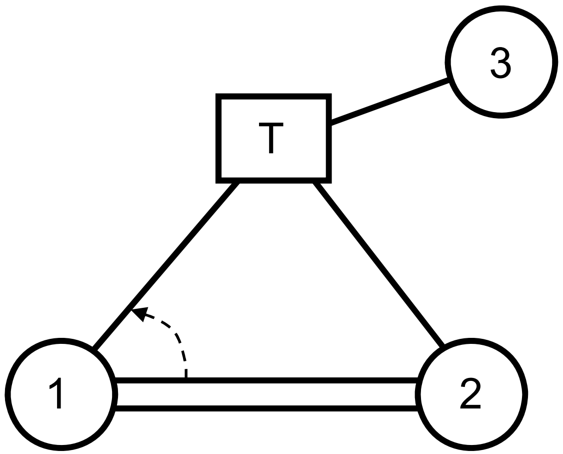


- El tráfico de desbordamiento no es estrictamente de Poisson
- Para facilitar el diseño de la red se asume que sí lo es
- Hay métodos más exactos, basados en obtener un tráfico de Poisson equivalente (p.ej. *Rapp*)

- Uso en el diseño de redes de comunicación
- Los enlaces directos entre nodos (centrales) sólo se establecen cuando el tráfico es elevado → Rentabilidad
- Los enlaces directos se diseñan para que tengan una eficiencia elevada
  - Supone una pérdida alta
- Se utilizan caminos alternativos (a través de centrales tandem) para el tráfico desbordado
- Si el tráfico entre dos nodos es bajo no se justifica el uso de un enlace directo

Sistemas con desbordamiento

- Se tiene la red de la figura, y su matriz de tráfico correspondiente

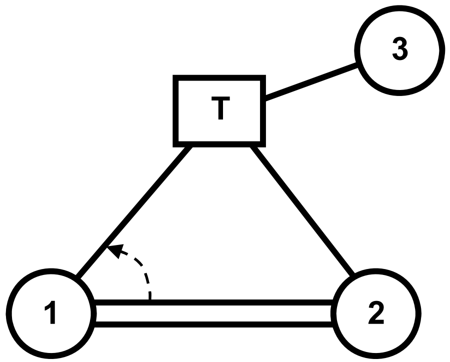


Matriz de tráfico *(ERLANGS)*

	1	2	3
1	-	T_{12}	T_{13}
2	-	-	-
3	-	T_{32}	-

1. Se dimensiona el enlace L_{12} a partir de T_{12}
   - Número de circuitos necesarios para llegar a una PB (o eficiencia) objetivo
   - Se calcula el tráfico desbordado por este grupo de circuitos
2. Se calcula el tráfico total ofrecido al enlace L_{1T}, como suma del desbordado por L_{12} y T_{13}
   - Se utiliza para calcular el número de circuitos necesarios en L_{1T} (PB objetivo)
   - Se calcula el tráfico cursado por este grupo de circuitos
3. Se dimensiona el enlace L_{3T} a partir de T_{32}
   - Se calcula el tráfico cursado por L_{3T}
4. Se calcula el tráfico ofrecido a L_{T2} como suma del ofrecido de 1 a 2 (T_{12}), desbordado por L_{12} y cursado por L_{1T} y el ofrecido de 3 a 2 (T_{32}) y cursado por L_{T3}
   - Se usa este tráfico para dimensionar L_{T2}

Sistemas con desbordamiento



Matriz de tráfico (*ERLANGS*)

	1	2	3
1	-	T_{12}	T_{13}
2	-	-	-
3	-	T_{32}	-

Enlace	*PB Objetivo*	*TO total*	*# circuitos* (Tablas)	*PB Final*
L_{12}	$PB_{Directa}$	$TO_{12}=T_{12}$	N_{12}	$PB_{12}=EB(N_{12},TO_{12})$
L_{1T}	PB_{Final}	$TO_{1T}=T_{13}+T_{12}\cdot PB_{12}$	N_{1T}	$PB_{1T}=EB(N_{1T},TO_{1T})$
L_{3T}	PB_{Final}	$TO_{3T}=T_{32}$	N_{3T}	$PB_{3T}=EB(N_{3T},TO_{3T})$
L_{T3}	PB_{Final}	$TO_{T3}=T_{13}\cdot(1-PB_{1T})$	N_{T3}	$PB_{T3}=EB(N_{T3},TO_{T3})$
L_{T2}	PB_{Final}	$TO_{T2}=T_{12}\cdot PB_{12}\cdot(1-PB_{1T}) + T_{32}\cdot(1-PB_{3T})$	N_{T2}	$PB_{T2}=EB(N_{T2},TO_{T2})$