E.T.S.I.I.T - Ingeniería de Telecomunicación

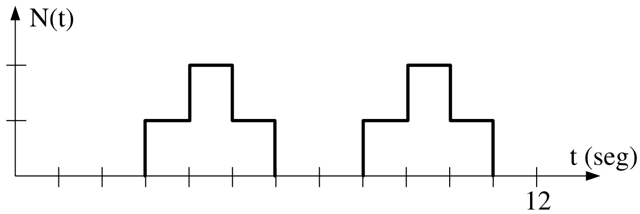
Redes Telefónicas - Curso 2011/2012

Tema 2 - Teletráfico
Hoja de problemas 1

Problema 1. Un grupo de circuitos cursan en 3 horas 500 llamadas con un tiempo medio de duración de 4 minutos. Calcular:

(a) Volumen de tráfico.
(b) Intensidad de tráfico cursado.
(c) Número medio de llamadas en el sistema.

Problema 2. Dada la figura representativa del estado de ocupación de un grupo de circuitos durante un tiempo de observación de 12 segundos, determinar:

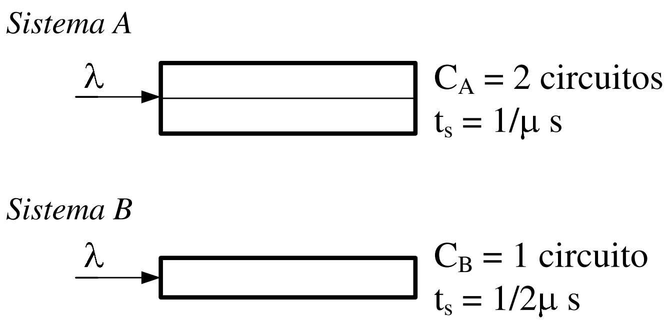


(a) La tasa de llegada de peticiones del sistema.
(b) El tiempo medio de servicio de una unidad.
(c) El número medio de circuitos ocupados.

Teniendo en cuenta que de la figura anterior se desprende que el grupo de circuitos constituye un sistema con tres posibles estados: 0, 1 y 2, durante el tiempo de observación, obtener:

(d) λ_0 y μ_1, y comprobar que $\lambda_0 \cdot p_0 = \mu_1 \cdot p_1$, siendo:
- λ_0 la tasa de cambios del estado 0 al 1, con la condición de que el sistema está en el estado 0.
- μ_1 la tasa de cambios del estado 1 al 0, con la condición de que el sistema está en el estado 1.

Problema 3. Dados los siguientes sistemas con pérdidas:



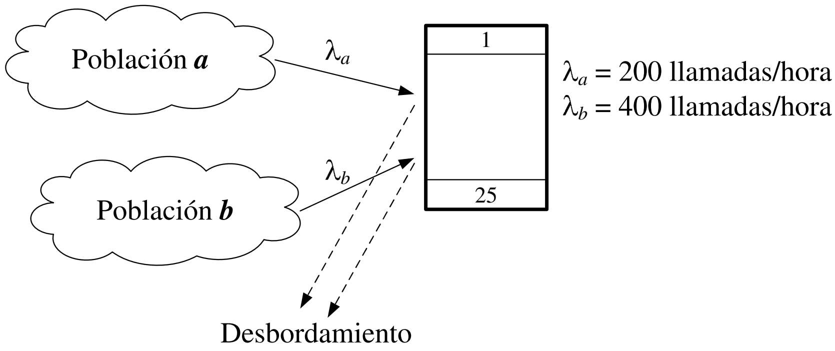
Sabiendo que en el Sistema A el tiempo medio de servicio por servidor es $1/\mu$, con ocupación aleatoria, mientras que en el Sistema B el tiempo medio de servicio del servidor es de $1/2\mu$, calcular, para los dos sistemas A y B:

(a) Tráfico ofrecido a un circuito (servidor).
(b) La expresión del *Grado de Servicio*. Decir cuál de los dos es más grande, razonando la respuesta.

Con la ayuda de los diagramas de transición entre estados (procesos de nacimiento y muerte), determinar:

(c) El tiempo medio de permanencia en el estado de bloqueo.
(d) El tiempo medio de permanencia en el estado 0 (sistema desocupado).
(e) Las probabilidades p_i ($i \neq 0$) de todos los estados diferentes al estado de desocupado p_0.
(f) Calcular la p_0 en función de $\rho = \lambda/\mu$.
(g) El número medio de llamadas que se están sirviendo en función de las p_i.
(h) Utilizando la relación de *Little*, calcular cuál es la tasa cursada de entrada en función de la probabilidad de bloqueo.

Problema 4. Dos poblaciones a y b infinitas generan un tráfico poissoniano de tasas λ_a y λ_b, respectivamente. Las peticiones de las dos poblaciones son atendidas por un grupo de $C = 25$ circuitos con un tiempo medio de servicio de 3 minutos.



Calcular:

(a) El tráfico ofrecido por cada población.
(b) La probabilidad de bloqueo para la población b.
(c) El tráfico cursado de la población a y de la población b.
(d) El tráfico perdido para las poblaciones a y b.
(e) La probabilidad de que una llamada sea de la población a y de la población b.
(f) La probabilidad de que una llamada desbordada provenga de la población a y la probabilidad de que lo haga de la población b.

Problema 5. Un grupo de 10 circuitos se ocupan de manera secuencial (esto es, se ocupa el primer circuito si éste está libre; si está ocupado se ocupa el segundo y así repitiendo esta búsqueda por orden para cada una de las ocupaciones hasta que se acaban los circuitos del grupo). Si el tráfico es de 10 *Erlangs* y el tiempo medio de duración de una llamada es de 120 segundos, calcular:

(a) El tráfico cursado por el grupo de circuitos.
(b) Tráfico cursado por el último circuito.
(c) Tasa con la que se ocupa el primer circuito.
(d) Tasa con la que se ocupa el último circuito.

En el caso en que la ocupación fuese aleatoria (es decir, se ocupa cualquier circuito de entre los que están libres), calcular:

(e) Tráfico cursado por el grupo de circuitos.
(f) Tráfico cursado por el primer circuito.
(g) Tráfico cursado por el último circuito.
(h) Tasa con la que se ocupa el primer circuito.

Problema 6. Se ofrece un tráfico de $A = 2$ *Erlangs* a un grupo de 2 circuitos. Si la ocupación de estos circuitos es secuencial, calcular:

(a) Probabilidad de tener un circuito ocupado.
(b) Probabilidad de tener 2 circuitos ocupados.
(c) Número medio de circuitos ocupados.
(d) Probabilidad de tener el primer circuito ocupado.

Si la ocupación es aleatoria, calcular:

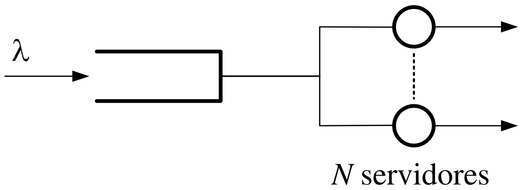
(e) Probabilidad de tener 0 circuitos ocupados.
(f) Probabilidad de tener un circuito ocupado.
(g) N° medio de circuitos ocupados.

Sugerencia: Estudiar los diagramas de estado de cada caso donde cada estado se puede representar por:

i,j

i: ocupación del primer circuito
j: ocupación del segundo circuito
i,j = 0 → libre   *i,j* = 1 → ocupado

Problema 7. Dado el sistema de *Erlang-C* representado en la figura:



es decir, un sistema constituido por N servidores, cola infinita y tiempo medio de servicio de una unidad para cada uno de los servidores $1/\mu$. Siendo λ la tasa de llegadas de peticiones al sistema y N, número de servidores, superior al tráfico ofrecido por λ, $N > TO$, señalar para cada una de las preguntas cuál de las respuestas es válida:

(a) El tráfico cursado por los servidores será:

1) $TO \cdot PD$ 2) TO 3) $TO(1 - PB)$ 4) TD

(b) La tasa de llamadas cursadas por el servidor será:

1) μ 2) $\lambda(1 - PB)$ 3) λ 4) μN

(c) El tiempo medio entre finalizaciones del servicio será:

1) $\dfrac{1}{\mu}$ 2) $\dfrac{1}{\lambda}$ 3) $\dfrac{1}{N\mu}$ 4) $\dfrac{1}{\lambda(1 - PB)}$

(d) El número medio de elementos en el sistema cola + servidores será:

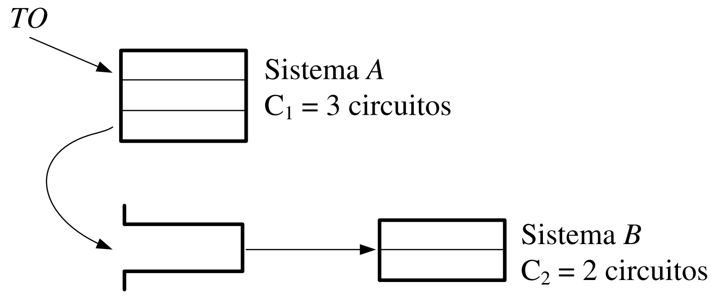
$$1)\quad N_q + \frac{N_{\text{servidores}}}{N} \qquad 2)\quad TC \qquad 3)\quad \frac{W_q + W_{\text{servicio}}}{\lambda} \qquad 4)\quad N_q + N_{\text{servidores}}$$

Problema 8. Una empresa dispone de una centralita privada, sin operador, de baja capacidad y ya dimensionada como sistema de acceso a la red pública pretendiéndose analizar su funcionamiento. La empresa tiene contratadas dos líneas a la compañía telefónica, de conexión con la red pública para dar servicio a 6 teléfonos (población finita pero distribución de *Poisson*), situados en diferentes despachos de aquélla.

Se sabe que cada uno de los teléfonos genera individualmente en promedio 3 llamadas durante la hora cargada, λ_{ind}, con una duración media de 120 segundos $(1/\mu)$. Para facilitar la resolución supondremos que las llamadas o bien se cursan o bien se pierden. Por otra parte, el acceso a las líneas es secuencial.

(a) Representar el diagrama de estados del sistema constituido por las dos líneas, indicando el estado (ocupado o libre) de cada una de las líneas y las tasas de transición.
(b) Encontrar las probabilidades de estar en cada uno de los 4 estados anteriores en función de $A_{\text{ind}} = \lambda_{\text{ind}}/\mu$.
(c) Tráfico ofrecido al sistema en función de A_{ind}.
(d) Número medio de líneas ocupadas.
(e) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema se bloquee?

Problema 9. Se dispone de un sistema formado por un grupo de C_1 circuitos sobre el que se ofrecen las llamadas en primera elección. Si este grupo está lleno, las peticiones se desbordan a otro grupo que dispone de un grupo de C_2 circuitos y una cola de capacidad ilimitada donde las llamadas esperan a que quede un circuito de este segundo grupo libre.

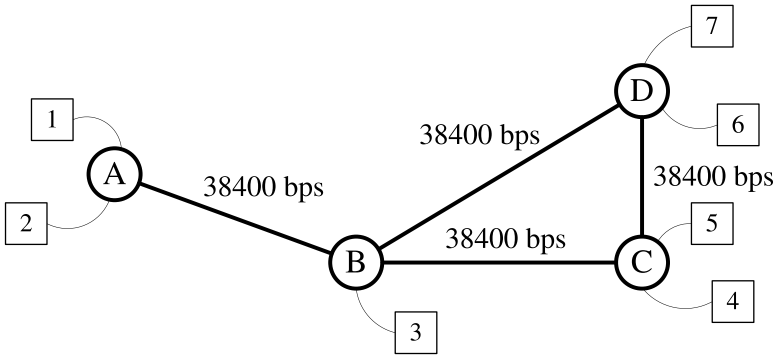


(a) Calcular el tráfico cursado por el grupo de circuitos A cuando $TO = 3$ *Erlangs*.
(b) Calcular el tráfico cursado por el grupo de circuitos B.
(c) Probabilidad de que una llamada que llegue al grupo B no se espere para conseguir un circuito.

(d) Asumiendo que las ocupaciones de los grupo A y B son independientes, calcular la probabilidad de que una llamada que llegue al sistema no se espere.

(e) ¿Qué valor máximo puede llegar a tener TO sin que el sistema llegue a saturarse (es decir, que el tamaño de la cola del grupo B no crezca indefinidamente)?

Problema 10. Considérese la red de conmutación de paquetes que se muestra en la figura:



donde la carga de paquetes medida en *paquetes/segundo* entre los nodos es la que se indica a continuación:

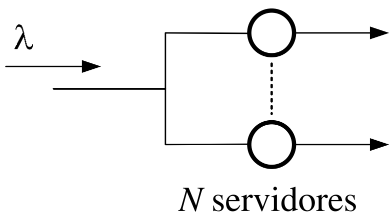
- De 1 a 4: 4 *paquetes/seg.*
- De 2 a 7: 8 *paquetes/seg.*
- De 3 a 6: 6 *paquetes/seg.*

Considerando que la longitud de los paquetes está distribuida exponencialmente con media 256 bytes, calcular el retardo medio en los siguientes casos:

(a) Se realiza el encaminamiento en base al mínimo número de saltos.

(b) Se cambia el encaminamiento de forma que la comunicación entre 3 y 6 se realiza a través de los enlaces BC y CD, en lugar de pasar directamente por el nodo D.

Problema 11. Dado el sistema de *Erlang-B* representado en la figura:



esto es, un sistema constituido por N servidores, con un tiempo medio entre servicio, por unidad $1/\mu$ para cada uno de ellos, y una tasa de llegadas de peticiones de servicio λ.

Señalar para cada una de las siguientes preguntas cuál de las respuestas es cierta.

(a) El tráfico ofrecido al sistema será:

1) λ 2) $\dfrac{\lambda}{\mu}$ 3) TC 4) $\dfrac{\mu}{\lambda}$

(b) Siendo N, el número de servidores, superior al tráfico ofrecido, $N > TO$ se debe cumplir:

1) $TC = TO$ 2) $TC < TO$ 3) $TC > TO$

(c) La tasa de llegadas cursadas por el conjunto de los N servidores será:

1) $\dfrac{N}{\mu}$ 2) λ 3) $\dfrac{TO(1-PB)}{1/\mu}$ 4) $\dfrac{TO}{1/\mu}$

(d) El tiempo medio entre finalizaciones de servicio será:

1) $\dfrac{1}{\mu}$ 2) $\dfrac{1}{N\mu}$ 3) $\dfrac{1}{\mu \cdot TO(1-PB)}$ 4) $\dfrac{1}{\lambda}$

Problema 12. Se dispone de un sistema con dos servidores y cola de capacidad infinita, en el que el tiempo de servicio es exponencial de media $1/\mu$ y la tasa de entrada depende del estado del sistema y sigue la ley $\lambda_n = \lambda/(1+n)$, siendo n el estado del sistema.

(a) Representar el diagrama de estados del sistema.
(b) Obtener las probabilidades de encontrarse en cada uno de los anteriores estados en función de $A = \lambda/\mu$.
(c) Obtener la tasa media de entrada al sistema en función de A, μ y p_0.
(d) Calcular el número medio de unidades en el sistema global en función de A y P_0.
(e) Obtener el número medio de unidades en el subsistema cola de espera y el número medio de unidades en el subsistema conjunto de servidores en función de A y P_0.
(f) Obtener el tiempo medio de permanencia en cada uno de los subsistemas en función de A y μ.

Problema 13. Se dispone de una CPU a la que se envían programas, para ser ejecutados, siguiendo una ley de Poisson de tasa λ. Estos programas se esperan hasta que son asignados a la CPU, lo cual se hace según el orden de llegada. Con objeto de mejorar el grado de servicio, el sistema dispone de la posibilidad de conectar otra CPU en el momento en que haya N o más programas esperando en la cola. El tiempo de ejecución por programa es exponencial con valor medio $1/\mu$.

Se pide:

(a) Diagrama de estados del sistema indicando las tasas de nacimiento y muerte.
(b) Probabilidad de cada estado en función de $A = \lambda/\mu$ y N.

Calcular en función de A, N y P_0:

(c) Tráfico ofrecido al sistema.
(d) Tráfico cursado por el sistema cuando únicamente hay una CPU activada.
(e) Probabilidad de bloqueo del sistema.
(f) Probabilidad de que la segunda CPU esté en funcionamiento.

Problema 14. A un nodo de conmutación se conectan 4 terminales. Dicho nodo dispone de 3 enlaces de salida de capacidad 9600 *bps* cada uno. Cuando un terminal genera un mensaje, éste transmite por cualquier enlace libre, o se guarda en un *buffer* (interno al terminal) a la espera de que quede algún enlace libre para transmitirlo. La longitud de los mensajes está distribuida exponencialmente con media 960 *bits*. Entre el nodo y los terminales existe un protocolo, de manera que cuando un terminal genera un mensaje queda inactivo (no genera más mensajes) **hasta que el nodo confirma que su mensaje ya ha sido transmitido** (dicha confirmación es inmediata). Cada uno de los terminales activos generan mensajes según una distribución de Poisson con tasa $\lambda = 2$ *mensajes/segundo*.

(a) Dibujar el diagrama de estados para el nodo.
(b) Calcular las probabilidades para cada uno de dichos estados.
(c) Calcular el número medio de mensajes en el nodo.
(d) Calcular el tiempo medio de permanencia en el nodo.

Problema 15. Un nodo de una red de conmutación de paquetes bajo estudio consta de un enlace de salida y una memoria adicional con capacidad para almacenar 3 paquetes. Una población infinita genera paquetes a una tasa media de λ p/s. La distribución de la longitud de los paquetes se supone exponencial y de media L bits. La capacidad de la línea de salida es de C *bps* mientras que el número de unidades en cola sea menor o igual a un paquete. Cuando esta condición no se cumple, el nodo renegocia instantáneamente con la red la capacidad del enlace, que pasa a ser de $2C$ *bps* para intentar drenar con mayor rapidez los paquetes entrantes.

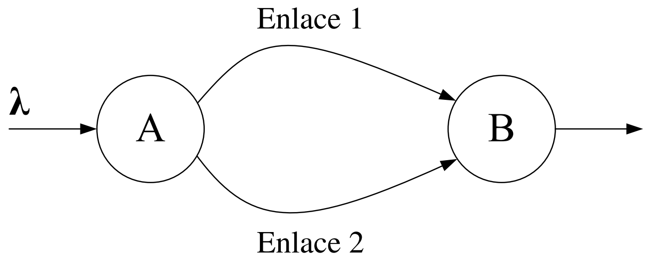
Se pide:

(a) Dibujar el diagrama de estados.
(b) Obtener la probabilidad de cada uno de los estados en régimen permanente.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione a C *bps*? ¿Y a $2C$ *bps*?
(d) ¿Cuál es la probabilidad de pérdida de un paquete?

(e) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el sistema?

Nota: En todo el problema se supone que la tasa media de servicio, correspondiente a la velocidad de transmisión C *bps*, es igual a la tasa de llegada de paquetes y, a su vez, igual a la unidad.

Problema 16. Para aumentar la fiabilidad, los nodos A y B de una red de datos están unidos por dos enlaces de capacidades respectivas C_1 y C_2, con $C_1 > C_2$.



El nodo A encamina los paquetes, de longitud exponencial de media L bits, por el enlace de mayor capacidad hasta que λ alcanza cierto umbral u p/s. El enlace 2 se empieza a utilizar cuando el tiempo de transferencia (espera + transmisión) por el enlace 1 se iguala al tiempo de transmisión de un paquete por el enlace 2, lo cual determina el valor de u. Cuando $\lambda > u$, A distribuye aleatoriamente los paquetes que sobrepasan el umbral de forma proporcional a la capacidad de los enlaces.

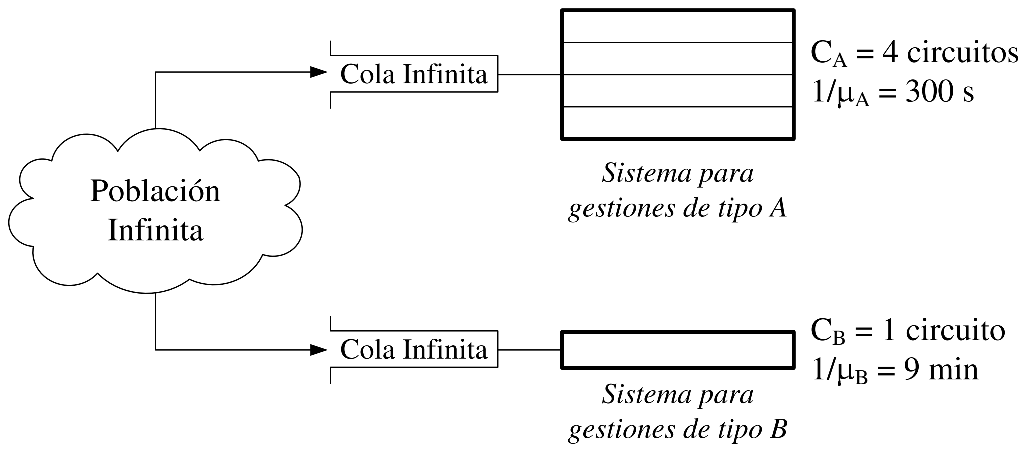
Teniendo en cuenta que:

- $C_1 = 64\ kbps$
- $C_2 = 32\ kbps$
- $L = 100\ bits$

Calcular:

(a) El valor de u.
(b) El valor de λ_1 y λ_2 cuando $\lambda = 2u$.

Problema 17. Las llegadas a una sucursal bancaria, por parte de una población infinita, se pueden modelar como un proceso de Poisson con tiempo medio entre llegadas de dos minutos. Dentro de la sucursal los clientes tienen la posibilidad realizar dos tipos de gestiones A y B, lo cual también se puede modelar como el acceso a dos tipos de sistemas, según se representa en la figura.



En el sistema A los circuitos C_A modelan el comportamiento de los oficinistas (que hacen gestiones del tipo A), y en el sistema B el circuito C_B modela el comportamiento del director de la sucursal (que hace gestiones del tipo B). La probabilidad de que un cliente desee realizar una gestión del tipo A es 0.8.

Calcular:

(a) Tráfico ofrecido y tráfico cursado por cada uno de los sistemas.
(b) Tiempo medio que deben esperar los clientes que realizan gestiones del tipo A y tiempo medio que deben esperar los clientes que realizan gestiones del tipo B.
(c) Si los clientes que hacen gestiones de tipo A eligen al azar cualquier oficinista que se encuentre libre, ¿a cuántos clientes atenderá un oficinista durante las 8 horas de un día de trabajo?

Problema 18. Una empresa que diseña aplicaciones tiene que implantar un sistema de servidores. Se asume que las peticiones de servicio siguen una distribución de *Poisson*, con tasa λ. El ingeniero se plantea dos alternativas:

- Emplear tres sistemas idénticos, en los que el tiempo de servicio medio (se asume una distribución exponencial) es de $1/\mu$. Si los tres servidores están ocupados, la petición se pierde.
- Sustituir dos de los anteriores equipos por uno de mayores prestaciones, con un tiempo de servicio medio (también distribuido exponencialmente) tres veces menor. En este caso, cuando una petición llega al sistema, es atendida por la máquina de mayores prestaciones y, si estuviera ocupada, por el segundo servidor. Al igual que en la anterior estrategia, cuando los dos servidores están ocupados, la petición se pierde.

Teniendo en cuenta que $\lambda = 2$ peticiones/segundo, y que el tiempo de servicio es $1/\mu = 1$ segundos, se pide:

(a) Determinar la probabilidad de pérdida en ambos sistemas; ¿cuál de las estrategias ofrece un mejor *GoS*?
Nota: Para analizar la segunda alternativa, representar cada estado como (i, j), donde i representa la ocupación del primer servidor y j la del segundo.

(b) En la segunda alternativa, ¿cuál es la probabilidad de que el primer servidor esté ocupado?

(c) Calcular, para los dos estrategias, el número medio de servidores ocupados y el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Problema 19. Una empresa tiene contratada 2 líneas de salida en su *"router"*, que se supone dispone de una memoria infinita para almacenar los paquetes antes de ser transmitidos. La capacidad de cada una de ellas es de C *bps* y se asume que la distribución de la longitud de los paquetes es exponencial, con media L *bits*, y que la tasa de llegada de paquetes al *"router"* es λ *pkt/s* . Para abaratar costes se decide valorar la posibilidad de contratar una única línea, con capacidad αC *bps* $(\alpha > 1)$. Se pide:

(a) Representar las cadenas de *Markov* que permiten analizar ambos sistemas. Establecer las tasas de nacimiento y muerte correspondientes y derivar la probabilidad de cada uno de los estados en función de λ, C, L y α.

(b) Derivar el tiempo medio de espera en la cola para los dos sistemas.

(c) Calcular el valor mínimo de α para que el tiempo medio total (espera y transmisión) sea igual en ambos casos.

(d) Teniendo en cuenta que el alquiler de una línea tiene un precio fijo de 30 €, más 10 € adicionales por *kbps* contratado, ¿sería rentable modificar la configuración? (Asumir que $L = 1000$ *bits*, $\lambda = 10$ *pkt/s* y $C = 10$ *kbps*)

Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Problema 20. Se va a analizar el sistema de planificación de las dos CPUs que una empresa tiene para atender las peticiones de sus empleados, que llegan según un proceso de Poisson de tasa λ. El planificador se ha programado de manera que cuando se recibe una petición siempre vaya a la CPU más rápida (se asume que el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial negativa, de media $\frac{1}{\mu}$), siempre que esté libre. Si estuviera ocupada, la petición se atendería por la otra CPU (su tiempo de servicio también es exponencial negativo, aunque con una media tres veces mayor que la de la anterior).
Teniendo en cuenta que $\lambda = 2$ peticiones/segundo y que el tiempo de servicio de la CPU más rápida es $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3}$ segundos, se pide calcular, de manera razonada:

(a) Probabilidad de que la 2ª CPU esté ocupada.

(b) Número medio de aplicaciones atendidas en el sistema y tiempo medio de permanencia en el mismo.
(c) Probabilidad de que el sistema esté bloqueado.

Pista. *Para resolver estos apartados, representar cada estado como (i, j), donde i representa la ocupación de la primera CPU y j la de la segunda.*

Se supone ahora que la empresa instala un nuevo conjunto de aplicaciones, que requieren una capacidad mayor que las anteriores. Para ello decide ampliar las prestaciones del sistema y adquiere una nueva CPU, con las prestaciones de la de mayor capacidad, para sustituir a la segunda.
Las aplicaciones a procesar pueden ser de dos tipos:

- *Grupo uno.* Requieren de una CPU para ser ejecutadas y el tiempo de servicio medio (distribución exponencial negativa) es, para las dos CPUs, igual a $\frac{1}{\mu}$ $\left(\frac{1}{4}\text{ segundos}\right)$.
- *Grupo dos.* Necesitan de las dos CPUs para poderse ejecutar, siendo el tiempo medio de servicio (distribución exponencial negativa) el doble del anterior ($\frac{2}{4}$ segundos).

El planificador se reprograma de manera que, cuando llega una petición del *Grupo uno* es atendida, de manera aleatoria, por cualquiera de las CPUs que esté libre. Cuando una petición no puede atenderse se pierde. Teniendo en cuenta esta nueva configuración, y que la probabilidad de recibir una petición es de 0.5 para cada uno de los grupos (equiprobables), manteniéndose la tasa global en $\lambda = 2$ peticiones/segundo, se pide resolver las siguientes cuestiones de manera razonada:

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos CPUs estén ocupadas?
(e) Obtener la probabilidad de bloqueo para cada grupo de aplicaciones.

Pista. *Para resolver estos apartados, representar cada estado como (i, j), donde i representa el número de CPUs ocupadas y j la aplicación que las ocupa.*

Problema 21. Se va a analizar el comportamiento de un nodo de comunicaciones, con una única interfaz de salida, de capacidad C bps. Se supone que los paquetes llegan según una distribución de *Poisson*, con una tasa λ paquetes por segundo, y que éstos tienen una longitud l, según una distribución exponencial negativa, de media L bits. Cuando un paquete llega al nodo y el enlace de salida está ocupado, se mantiene en un *buffer* (que se supone infinito) hasta que pueda ser transmitido. Debido a un crecimiento en la tasa de llegada de paquetes, se decide incorporar un *regulador* de tráfico a la entrada del nodo. Así, cuando haya S o más paquetes en el nodo (esperando o en el enlace de salida), el regulador entrará en funcionamiento y descartará, con una probabilidad $1 - q$, cualquier nueva llegada.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. Establecer las tasas de nacimiento y muerte y calcular la probabilidad de los estados correspondientes.

(b) ¿Cuál es el valor máximo de q, en función de L, C y λ, para que el sistema sea estable?
(c) Calcular la probabilidad de que una nueva llamada sea rechazada.
(d) ¿Cuál es el número medio de paquetes en el *buffer* de espera?
(e) Obtener, a partir del resultado del apartado anterior, el tiempo medio que un paquete tiene que permanecer esperando en el *buffer* del nodo.
(f) ¿Cuánto vale dicho tiempo cuando $q = 1$? Discutir el resultado obtenido.
En este último apartado, asumir que $C > \lambda L$.

Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Además:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x^i = \frac{1-x^N}{1-x} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{N-1} i x^i = x\left(\frac{1-x^N}{(1-x)^2} - \frac{N x^{N-1}}{1-x}\right)$$

Problema 22. Una compañía de banca on-line quiere establecer un centro de atención al cliente vía telefónica. Para ello se plantea contratar a tres operadores, que atenderán las llamadas de los clientes. Se supone además que cuando los tres operadores están ocupados, cualquier llamada nueva se pierde. Se ha estimado que se producen 2 llamadas por minuto y que su duración media es de 1 minuto. Considerando que el tráfico correspondiente sigue un modelo de *Poisson*, se pide resolver razonadamente las siguientes cuestiones.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se pierda una llamada? ¿Cuál es el tráfico que cursa el sistema?
(b) Aplicando la relación de Little, obtener el tiempo medio de permanencia en el sistema. ¿Cuál es el porcentaje de ocupación de cada operador, si se asume elección aleatoria?
(c) ¿Cuantos operadores serían necesarios para reducir la probabilidad de bloqueo hasta el 10 %?
(d) La empresa distingue ciertos clientes como *premium*. Si se mantiene el sistema original de tres operadores (que no tiene ningún tipo de inteligencia), ¿cuál es la probabilidad de que una llamada de un cliente *premium* se pierda?
Suponer que el porcentaje de clientes premium *es $100 \cdot \alpha$.*

La compañía quiere fidelizar a sus clientes *premium*, para lo que pretende que sus llamadas tengan una probabilidad de bloqueo inferior. Para ello establece el siguiente procedimiento: cuando hay dos operadores ocupados, sólo se aceptarán llamadas de los clientes *premium*, rechazando el resto de llegadas al sistema.

(e) ¿Cuál es el porcentaje máximo de clientes *premium* que puede haber para que la probabilidad de perdida de sus llamadas sea inferior al 10 %?

(f) Si se supone que $\alpha = 0.4$ (el 40 % de los clientes son *premium*), cuál es la probabilidad de bloqueo de sus llamadas? ¿Y la de las llamadas del resto de clientes?
(g) Calcular, en este caso, el tráfico cursado por el sistema y, a través de la relación de Little, establecer el tiempo medio de permanencia en el mismo.
(h) Si el turno de trabajo de los operadores es de 8 horas, ¿cuánto tiempo estará atendiendo llamadas cada agente en el sistema modificado?
Se sigue suponiendo que la asignación de los operadores a las llamadas es aleatoria.

Problema 23. Se cuenta con un nodo de comunicaciones, con dos interfaces de salida, de capacidad C bps cada una. Se supone que los paquetes llegan según una distribución de *Poisson*, con una tasa λ paquetes por segundo, y que éstos tienen una longitud l, según una distribución exponencial negativa, de media L bits. Cuando un paquete llega al nodo y los dos enlaces de salida están ocupados, se mantiene en un *buffer* (que se supone infinito) hasta que pueda ser transmitido. Si se define A como $\frac{\lambda}{\mu}$, donde μ es el inverso del tiempo de servicio, se pide resolver las siguientes cuestiones, en función de A, λ y μ.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. Establecer las tasas de nacimiento y muerte y calcular la probabilidad de los estados correspondientes.
(b) ¿Cuál es el número medio de paquetes en el nodo (esperando o en una interfaz)? Utilizando la relación de Little, calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Debido a una incidencia en la red, una de las interfaces de salida baja su capacidad hasta un valor $\alpha \cdot C$ ($\alpha < 1$). El gestor del nodo se plantea dos posibilidades: (1) anular la interfaz más lenta; o (2) dejarla en funcionamiento, asumiendo que un paquete se transmitirá, de manera totalmente aleatoria, por cualquiera de las dos interfaces cuando ambas estén libres.

(c) Modelar el sistema de la opción (1) con una cadena de *Markov*. Establecer las tasas de nacimiento y muerte y calcular la probabilidad de los estados correspondientes. ¿Cuál es el número medio de paquetes y el tiempo medio de permanencia en el sistema?
(d) Repetir el apartado anterior para la opción (2). ***Pista:*** *Dividir el estado en el que hay un único paquete en el nodo en dos estados, en función de cuál sea la interfaz por la que se esté transmitiendo el paquete.*
(e) ¿Cuál es el valor de A, en función de α, que le puede ayudar al gestor a decantarse por una u otra opción, teniendo en cuenta el tiempo de permanencia en el sistema?

Nota: *Asumir, en cualquier caso, que el sistema es estable.*
Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Problema 24. En una oficina trabajan 2 personas, que comparten un servidor de impresión con una única impresora. Al enviar un trabajo, se debe esperar a que haya concluido para poder volver a remitir otro documento. Se supone además que el servidor tiene memoria suficiente para almacenar trabajos pendientes. Se sabe que el tiempo medio entre el momento en que acaba un trabajo y el envío del siguiente es, para cada terminal, $t_{\text{ia}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1$ minuto (distribución exponencial negativa) y que el tiempo de impresión (asimismo distribución exponencial negativa), tiene un valor medio de $t_{\text{impresión}}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 1$ minuto.

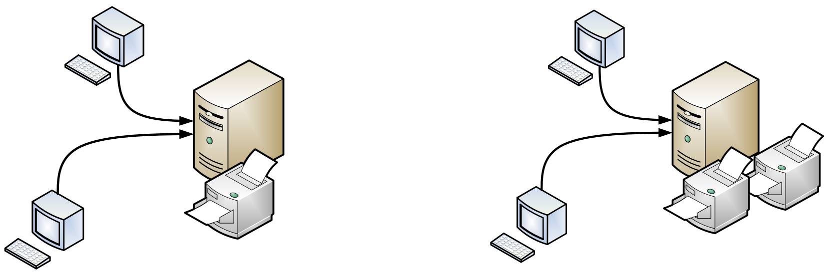
(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un trabajo esperando en el servidor de impresión?

(b) Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera y el de estancia total en el servidor (espera más impresión).

Para mejorar el comportamiento del sistema, se decide añadir al servidor una segunda impresora, el doble de rápida que la anterior. Se modifica la política del servidor, de manera que cuando llegue un trabajo sea atendido por la impresora más rápida, siempre que esté libre; en caso contrario iría a la que había originalmente.

(c) Modelar el nuevo sistema, y calcular la probabilidad de que esté funcionando la impresora nueva.
Nota: Para analizar la segunda alternativa, representar cada estado como (i, j), *donde* i *representa la ocupación de la primera impresora (rápida) y* j *la de la segunda.*

(d) Volver a calcular el tiempo medio de espera, así como el de permanencia en el sistema, tras la modificación que se ha realizado.



(a) Configuración inicial　　(b) Configuración mejorada

Problema 25. La Universidad de Lusitania dispone de un super-computador para que los diferentes grupos de investigación puedan mandar sus simulaciones más pesadas. Debido al volumen de datos necesarios, el servidor sólo dispone de memoria para almacenar una petición en espera cuando el procesador esté atendiendo otra. Si llegara una aplicación cuando el servidor y la memoria están ocupados, ésta se perdería.

Se supone que las llegadas al super-computador siguen una distribución de Poisson, con una tasa de $\lambda = 3$ peticiones/hora, y que el tiempo que tarda el procesador en finalizar las simulaciones se puede modelar como una variable aleatoria exponencial negativa de media $t_{\text{servidor}}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 20$ minutos.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un trabajo esperando en el sub-sistema de memoria? ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo?
(b) Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera y el de estancia total en el computador (espera más procesador).

Con el objetivo de reducir el consumo que supone poner en marcha el procesador se decide hacer una modificación en el sistema, de manera que cuando llega una petición, se mantiene a la espera, pasando al procesador únicamente al recibir una segunda simulación; cuando el simulador se enciende, no se vuelve a pasar al estado de *stand-by* hasta que el sistema esté desocupado. Al igual que antes, se asume que una petición se pierde si llega cuando tanto servidor como memoria están ocupados.

(c) Modelar el nuevo sistema, y calcular las probabilidades de espera y de bloqueo. *Nota: Para analizar esta alternativa, representar cada estado como (i, j), donde i representa la ocupación del sub-sistema de espera y j la del procesador.*
(d) Volver a calcular el tiempo medio de espera, así como el de permanencia en el sistema, tras la modificación que se ha realizado. Comentar los resultados.

Problema 26. Una pequeña empresa tiene una base de datos para gestionar toda la información relativa a sus empleados. Para acceder a la misma se dispone de una aplicación que tiene dos procesos, de manera que si llegara una tercera petición cuando ambos están ejecutándose, ésta se perdería. Teniendo en cuenta que el tiempo necesario para atender una consulta a la base de datos sigue una distribución exponencial negativa, con un valor medio $t_s = 3$ segundos, y que las peticiones llegan, según un proceso de *Poisson*, a una tasa de $\lambda = 20$ consultas/minuto, se pide resolver razonadamente las siguientes cuestiones.

(a) Modelar el sistema como un proceso de nacimiento y muerte y calcular, a partir del mismo, la probabilidad de que una petición a la base de datos se pierda.
(b) ¿Cuál es el número medio de peticiones en la aplicación? Utilizando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio de permanencia en la misma.

Una vez puesto en marcha el servicio, se determina que un porcentaje de llegadas $(\alpha \cdot 100)$ vienen del departamento de recursos humanos (RRHH), mientras que el resto provienen de otros departamentos.

(c) Si $\alpha = \frac{2}{3}$, ¿cuál es la probabilidad de pérdida para las peticiones de RRHH? ¿Y para las que vienen del resto de departamentos?

Con objeto de priorizar las consultas que se llevan a cabo desde RRHH se hace una modificación en la aplicación. Así, se establece que una petición que provenga de este departamento permanezca en espera cuando los dos procesos están ocupados (únicamente se permite que haya una consulta en espera).

(d) Modelar el nuevo sistema como un proceso de nacimiento y muerte. Calcular la probabilidad de pérdida para las consultas de RRHH y para las peticiones de otros departamentos.
(e) ¿Cuál es el número medio de procesos ocupados? ¿Cuál es el número medio de consultas en espera?
(f) Utilizando la relación de *Little*, y a partir de los resultados del apartado anterior, calcular el tiempo medio de espera y el de permanencia *total* en la aplicación.
(g) ¿Cuál es la probabilidad de pérdida global?

Problema 27. La empresa CONSULTEL S.L. tiene un servicio de atención al cliente con tres líneas y dos operadores, de manera que cuando los dos operadores están ocupados, sólo puede permanecer en espera un cliente. Se supone que las llamadas llegan (según una distribución de *Poisson*) a una tasa $\lambda = 2$ llamadas por minuto, y que su duración (distribución exponencial negativa) media es de 1 minuto.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*, asumiendo que los clientes en espera se mantienen en el sistema hasta que les atienda un operador. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté bloqueado? Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera.

Se va a analizar la impaciencia de los clientes, utilizando dos modelos diferentes:

Modelo 1 En este caso se supone que cuando un cliente, al llamar, encuentra los dos operadores ocupados, decide permanecer a la espera con una probabilidad α.

Modelo 2 Los clientes, cuando están esperando, pueden decidir finalizar la llamada. El tiempo de espera que aguantan en espera se modela con una variable aleatoria exponencial negativa, con media $\frac{1}{\gamma}$.

(b) Representar el modelo 1 con una cola de Markov. Calcular la probabilidad de bloqueo y el tiempo medio de espera, cuando $\alpha = \frac{3}{4}$.
(c) Representar el modelo 2 con una cola de Markov. Calcular la probabilidad de bloqueo y el tiempo medio de espera, cuando $\frac{1}{\gamma} = 30$ segundos.
(d) ¿Cuál es el valor de α que hace que las probabilidades de bloqueo de ambos modelos sean iguales? (se mantiene que $\frac{1}{\gamma} = 30$ segundos). ¿Cuál es el tiempo medio de espera en ese caso?
(e) Explicar brevemente cómo se podría calcular la probabilidad de que un cliente decidiera finalizar la espera en el modelo 2.

Problema 28. Un centro de investigación dispone de un computador de altas prestaciones para realizar análisis que requieren de una gran carga computacional. Cuando se está ejecutando una simulación, y debido al volumen de información que se necesita para realizar el análisis, sólo se puede tener una petición en espera, con lo que si llegara otra cuando el servidor y la memoria están ocupados, se perdería.

Se supone que las llegadas al simulador se pueden modelar como un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 6$ peticiones/hora y que el tiempo que tarda el procesador en finalizar el análisis se corresponde con una variable aleatoria exponencial negativa de media $t_s = 10$ minutos.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo?
(b) Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera y el de estancia total en el computador (espera más procesador).

Se comprueba que algunos de los análisis que se llevan a cabo no convergen, por lo que tienen que ser repetidos con otros valores iniciales, lo que sucede con una probabilidad $1 - \alpha$. En esta situación, cuando finaliza una simulación que no ha obtenido resultados adecuados, se vuelve a ejecutar inmediatamente.

(c) Modelar el nuevo sistema, y calcular la probabilidad de bloqueo, asumiendo que $\alpha = \frac{1}{2}$.
(d) Aplicando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio que una simulación (considerando todas las ejecuciones) está en el procesador y el tiempo medio de espera.
(e) ¿Cuántas ejecuciones son necesarias (en media) para cada análisis? ¿Cuál es el tiempo medio por ejecución?. *Nota:* Si $|x| < 1$, se sabe que $\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$