Redes de Comunicación

Procesos estocásticos (PE) y

Cadenas de Markov

Instructor:

Dr.-Ing. K.D. HACKBARTH

Versión 20. 08 2012

1. Motivación
2. Conocimiento básico previamente requerido
3. Definiciones básicas, clasificación y características de PE
4. Unos PE especiales
5. El Proceso de Markov
6. Cadenas de Markov en tiempo discreto
7. Cadeneas de Markov en tiempo continuo

Motivación I

1. Conocimiento sobre PE en general y especialmente Cadenas de Markov se requiere en varios campos de las telecomunicación
2. En la asignatura de Redes de Comunicaciones consideramos el concepto de trafico que se introducción ya en el capitulo de la introducción
3. Los PE son el instrumento básico para el estudio de
   - Descripción de trafico de fuente
   - Descripción de trafico de sistema
   - Análisis de rendimiento de los sistemas
   - Diseño y dimensionado de redes

Motivación II

Desde los PE vamos a deducir sobre todo el comportamiento de tres tipos de sistemas básicos:

- Sistemas de pérdida pura
- Sistemas de espera puro
- Sistema de espera perdida

Popularmente se dice que la teoría sobre el comportamiento de sistemas de pérdida y espera forma parte de la teoría de procesos estocásticos en el sentido aplicado

Entonces nos limitamos en el estudio de los PE a las cadenas de Markov y sus aplicaciones en la ingeniería de trafico y análisis de rendimiento de sistemas

Conocimiento básico previamente requerido

Para la comprensión de este capitulo se requiere conocimiento básico de la teoría de probabilidad

Sobre todo se aplican los siguientes conceptos:

- Definición del espació de probabilidad
- Suceso y suceso elemental
- Probabilidad absoluta y condicionada, independencia estadística, teorema de probabilidad total, formulas de Bayes
- Variable aleatoria real y entero **(v.a.)**
- Función de distribución y función de densidad de una v.a.
- Momentos de una v.a.
- Valor medio, Varianza, Covarianza, Indice de dispersión
- Función característica de una v.a. y función de generación de momentos
- Transformación Laplace de una v.a. real y transformación Z de una v.a. entero
- Desigualdades y teorema del limite

- Sea $X(\omega)$ con $\omega \in \Omega$ una v.a. con un espacio de sucesos Ω
- entonces un PE es un conjunto (finito o infinito) de v.a. relacionado por una función determinística

$X(\omega, t)$ o abreviado $X(t)$

X(t) para un valor ti fijo $X(t_i)$ forma una v.a. con todos sus características como fdp, FDP momentos etc.

Depende de la características de los valores de X(t) y t se clasifican en

- Cadenas de Markov de tiempo discreto
- Cadenas de Markov de tiempo continuo
- Procesos en tiempo discretos
- Procesos en tiempo continuo

Clasificación de los PE

Nombre	Tipo de la v.a.	Tipo del parametro temporal	Símbolo	Valor
Cadena discreta	Discreto	Discreto	N_i , X_i	n_i , x_i
Cadena continua	Discreto	Continuo	N(t) , X(t)	n(t) , x(t)
Proceso discreto	Continuo	Discreto	X_i	x_i
Proceso continuo	Continuo	Continuo	X(t)	x(t)

Definiciones y Anotaciones I

Estado de un PE

Describe el conjunto de los v.a. que el PE puede cubrir

$$\mathbf{X(t) := \{ X_0(t_0), X_1(t_1) \ldots X_i(t_i)\ldots\}}$$

Realización de un PE

Describe una realisazión concreto de un PE

$$\mathbf{x(t) := \{x_0(t_0), x_1(t_1)\ldots\ldots\ldots x_i(t_i)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}} \quad \text{con } x(t) \in X(t)$$

Probabilidad absoluta de una realización

$$\mathbf{p_x(t) := Pr\{X(t)=x(t)\} \;\; con \;\; x(t) \in X(t)}$$

Definiciones y Anotaciones II

Probabilidad de transición entre dos realizaciones de un PE

$$P_{x',x}(t',t) = Pr\{X(t)= x(t) \;/\; X(t')=x'(t')\}$$

Función de distribución de Probabilidad de un PE

$$F_{X0X1\ldots Xi\ldots}(x_0,x_1,\ldots x_i\ldots;t_0,t_1\ldots t_i\ldots) :=$$

$$Pr\{\; X_0(t0)<=x_0,\; X_1(t1)<=x_1,\ldots\; X_i(t_i)<=x_i,\ldots\;\}$$

Función de densidad de probabilidad de un PE

$$f_X(x(t) := dn/\;(dx_1\ldots dx_n)\;\{F_X[X(t)<=x(t)]\}$$

Por la complejidad de los PE los estudios se limitan

i. **Solamente al análisis de unas valores características o**
ii. **a unos PE cuya característica permite una reducción en su complejidad y al mismo momento una aproximación de la realidad con suficiente exactitud**

Valores características de un PE I

Esperanza de un PE

$$m_X(t) = E[X(t)] := \int_{-\infty}^{\infty} x*f_X(x,t)dx$$

Varianza (dispersión) de un PE

$$D_X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} [x-m_X(t)]^2*f_X(x,t)dx$$

Desviación típica de un PE

$$\sigma_X(t) := [D_X(t)]^{0.5}$$

Índice de dispersión de un PE

$$I_X(t) := D_X(t)/\ E[X(t)]$$

Se observe que todos estos valores características son funciones deterministicas con el parámetro t
Para un valor t_i concreto tienen las mismas características como la v.a. en la teoría de probabilidad

Valores características de un PE II

Función de correlación temporal de un PE

$$C_X(t,t') := E\{[X(t)-m_X(t)]^*[X(t')-m_X(t')]\}$$

Función de correlación temporal normalizado de un PE

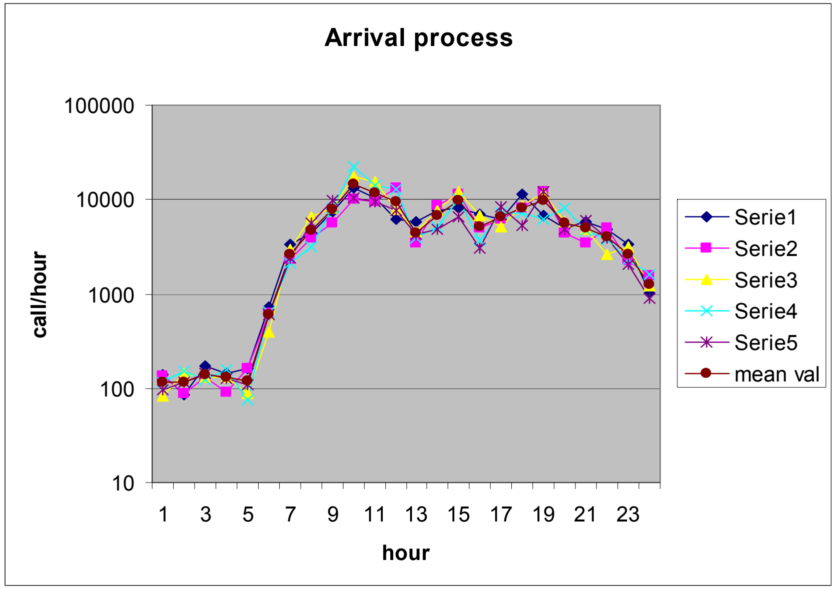
$$R_X(t,t') := C_X(t,t') / [D_X(t)^*D_X(t')]^{0.5}$$

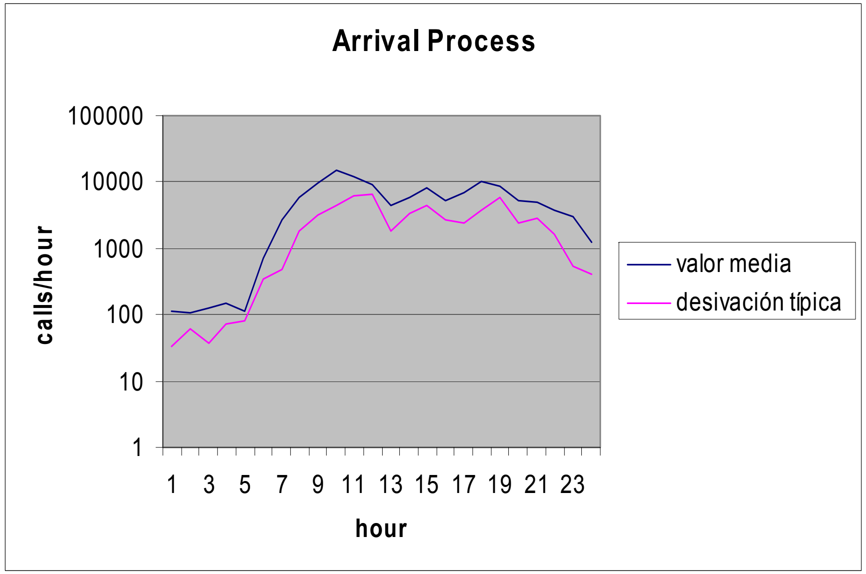
Las funciones de correlación temporal de un PE son funciones deterministicas de dos variables temporales

Estudio de un ejemplo practico de un PE

- En una central de conmutación se registran cada 30 segundos el número de llamadas que han llegado y la duración media de las llamadas dentro de estas llamadas
- Cada seria de medidas representa una realización del correspondiente PE
- Con un número suficiente de medidas, e.g. cada 6 s, se puede aproximar el valor media y la dispersión por cada hora
- Ambos valores permiten de calcular el Índice de dispersión
- Finalmente el producto de las valores medidas del PE de llegada con el PE de duración proporciona el valor media del trafico, cifra importante para el análisis de rendimiento y el dimensionado

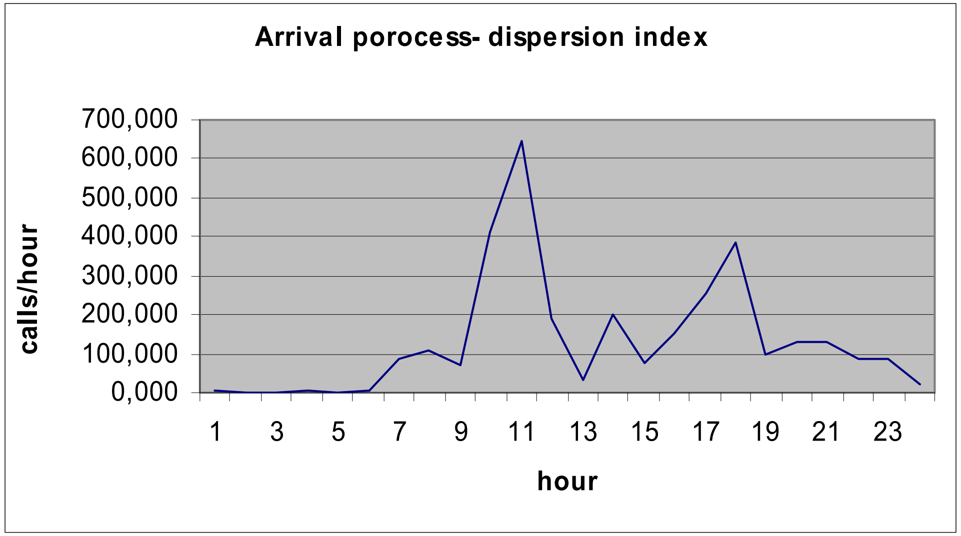
Proceso de llegada a una central de conmutación I



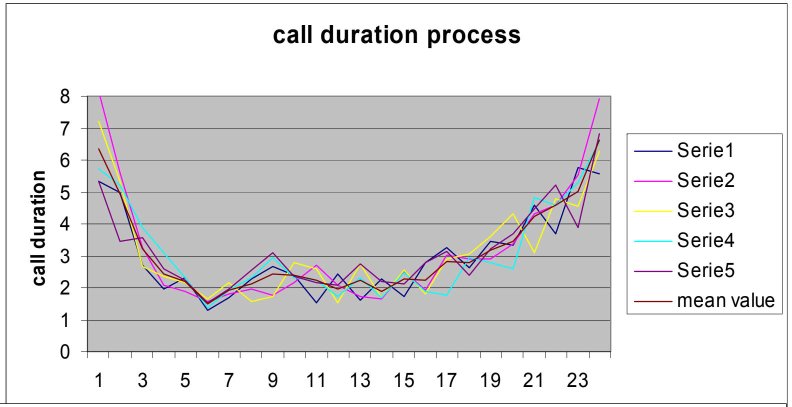


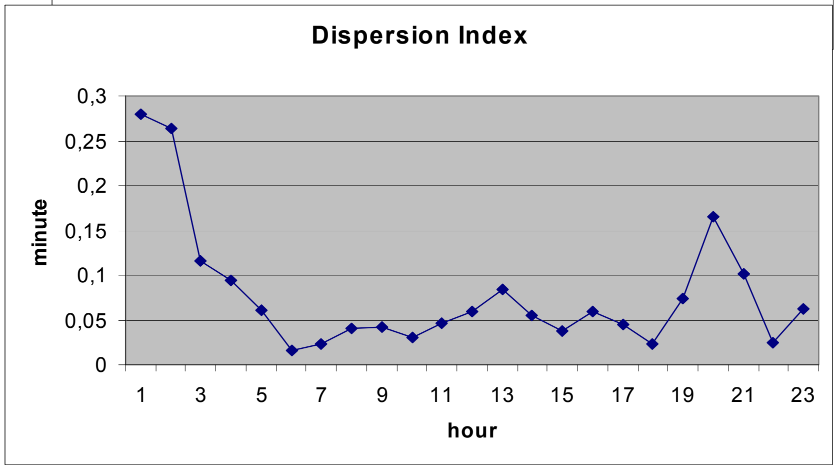
Proceso de llegada a una central de conmutación II

HORA	mean /h	desviación tipica	Indice de dispersión
1	130,464	26,395	5,418
2	111,080	19,636	3,120
3	120,755	16,550	2,299
4	120,642	21,574	3,641
5	119,913	9,904	0,889
6	639,474	77,656	9,482
7	2313,742	281,260	29,004
8	4466,461	851,807	154,678
9	9300,073	953,450	106,777
10	16630,265	2757,621	463,833
11	15231,834	1733,107	264,236
12	11415,849	1433,876	205,893
13	5385,717	354,684	24,110
14	7102,394	904,641	126,952
15	9223,627	2112,608	489,969
16	4228,832	927,221	197,507
17	5961,597	1308,419	314,898
18	8129,467	1509,573	257,272
19	7498,081	1040,727	116,575
20	6670,739	754,707	97,667
21	4639,283	927,566	173,479
22	3970,118	609,896	92,282
23	2420,747	555,165	129,017
24	1245,212	147,859	18,787



Proceso duración de la llamada

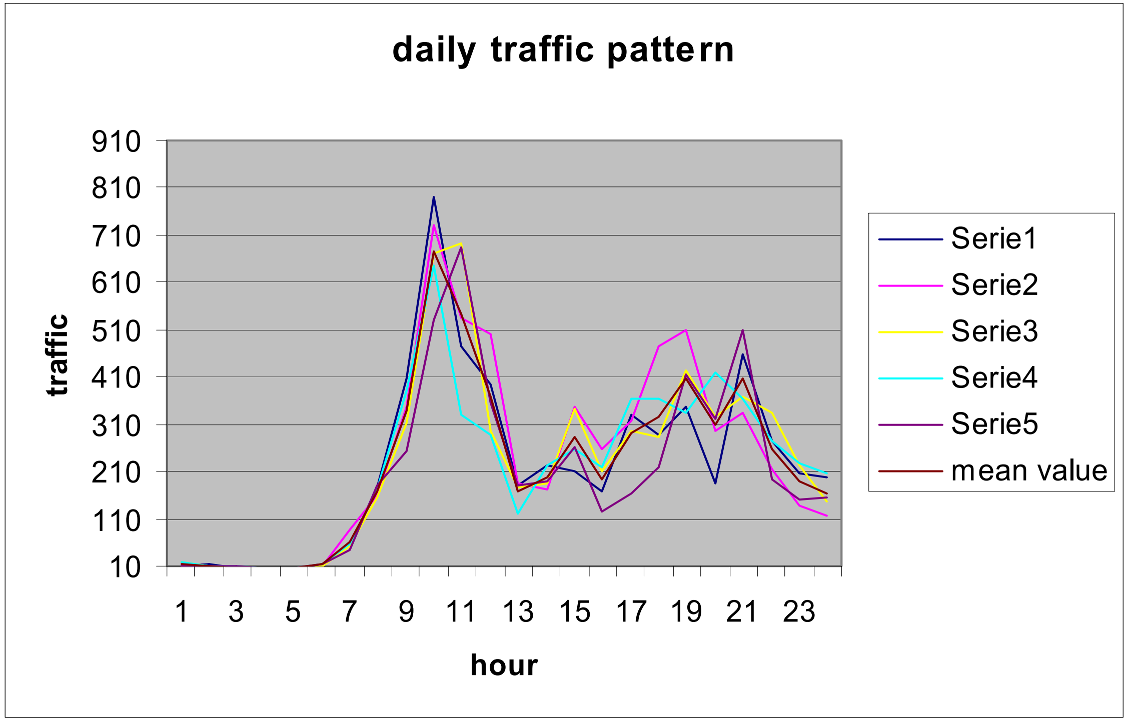




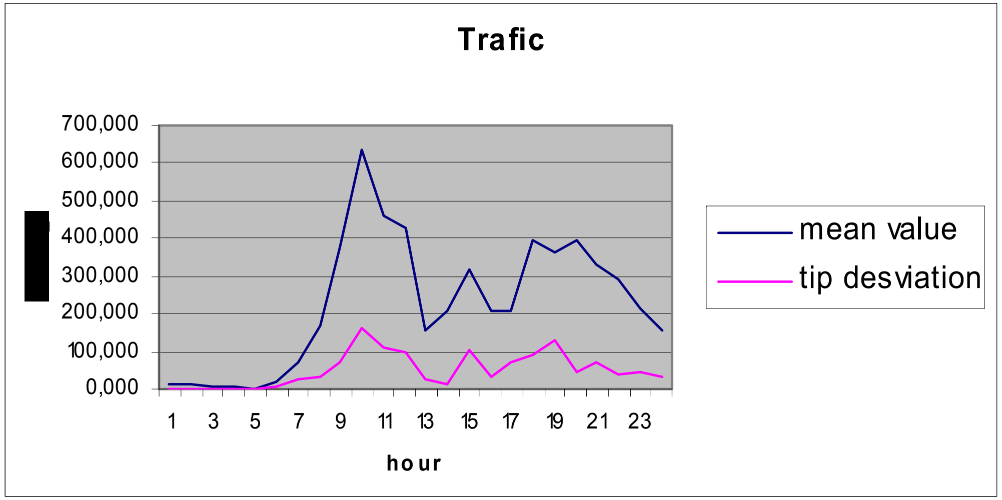
Hour	mean/hour	desviación típica	Ind de disp
1	6,882	0,87211008	0,11051671
2	4,598	0,74198113	0,1197338
3	3,588	0,64278768	0,11515496
4	2,266	0,41983806	0,07778641
5	1,962	0,24152847	0,02973293
6	1,65	0,21419617	0,02780606
7	1,874	0,22240504	0,02639488
8	1,932	0,31269154	0,0506087
9	2,26	0,29631065	0,03884956
10	2,244	0,51821231	0,11967201
11	2,276	0,29391155	0,03795431
12	2,242	0,33035738	0,04867797
13	2,358	0,12843675	0,00699576
14	2,036	0,28793055	0,04071906
15	2,234	0,15213152	0,01035989
16	2,52	0,40199502	0,06412698
17	2,754	0,26956261	0,02638489
18	2,598	0,374988	0,05412471
19	2,754	0,51180465	0,09511402
20	3,808	0,5380855	0,07603361
21	3,768	0,26588719	0,01876221
22	4,932	0,66859255	0,09063585
23	4,436	0,56037844	0,0707899
24	6,59	0,24091492	0,00880728

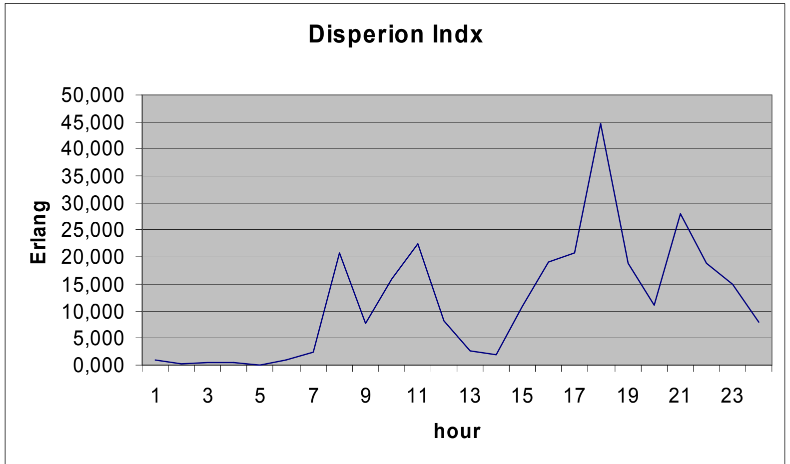
Proceso de trafico en una central de conmutación I

Hour	mean/hour	desviación típica	Ind de disp
1	14,111	2,085	0,308
2	8,449	3,003	1,068
3	7,613	1,949	0,499
4	4,264	0,415	0,040
5	3,947	1,428	0,517
6	15,643	1,376	0,121
7	70,868	18,313	4,732
8	197,489	52,566	13,991
9	337,790	85,250	21,515
10	638,391	178,766	50,059
11	423,174	109,846	28,513
12	356,946	40,351	4,561
13	180,864	45,182	11,287
14	237,590	61,845	16,098
15	292,130	43,410	6,451
16	189,952	39,073	8,037
17	249,696	45,567	8,316
18	339,622	82,901	20,236
19	453,693	78,043	13,425
20	328,360	48,394	7,132
21	374,039	41,706	4,650
22	276,377	46,398	7,789
23	222,333	29,239	3,845
24	179,445	34,251	6,538



Proceso de trafico en una central de conmutación II





- Estudiamos ahora unos procesos estocásticos que cumplen algunas condiciones adicionales porque permiten:
  - un análisis generalizado a base del modelo y no solamente a base de un conjunto de valores de medidas
  - estudios de análisis de rendimiento de trafico y de sistemas de telecomunicación
  - deducir formulas analíticas para el dimensionado de sistemas y redes de telecomunicación
  - expandir formulas analíticas a formulas empíricas con estudios adicionales de simulación

- Un clase importante de PE son los procesos que tienen un comportamiento homogéneo en el tiempo, eso significa que la FDP de

$$\mathbf{X(t,t')=X(t)-X(t')}$$

  - no depende del valor absoluto de t' sino solamente del intervalo t-t'

- => Un PE es homogéneo si y solamente si se cumple para todos los t, t'

$$\mathbf{P_{x',x}(t',t) = p_{x',x}(\Delta t) \text{ con } \Delta t= t-t'}$$

- Una otra clase importante de PE’s son los procesos estacionario.
- Para estudiar este característica dividimos el eje temporal en disjuntos intervalos

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

- Entonces la estacionaridad significa que la probabilidad de que un suceso ω ocurre k=0, 1,2.. veces en uno de los intervalos depende solamente de la longitud de Δti pero no de su valor temporal absoluto
- => Un PE es estacionario si y solamente si se cumple para todos τ

$$F_X(x,t+\tau) = F_X(x,t)$$

Características de un proceso estacionario

Para todos los τ se cumple:

$$\mathbf{E[X(t+\tau) = E[X(t)]= const}$$

$$\mathbf{V[X(t+\tau) = V[X(t)]= const}$$

$$\mathbf{C_X(t, t+\tau) = E[X(0)*X(\tau)] – \{E[X(0)]\}^2 = C_X(\tau)}$$

- **PE corriente** (ordinary stochastic process)
  - Un PE se llama corriente si la probabilidad de que un suceso ocurre más que una vez en un pequeño intervalo de tiempo converge contre cero

- **PE con convergencia estacionario**
  - es un PE que converge con t creciente al estado de estacionaridad (steady state condition SSC)

PE markoviano I
(Markov process)

- Finalmente introducimos los PE que es libre de efectos del pasado. Este idea formuló A.A. Markov 1907 por primera vez en relación con PE discretos (cadenas) y se generalizó por A.N.: Kolmogorow (1931) y A.J. Chintschins (1933). Los procesos libre de efectos del pasado se llaman procesos de Markov
- La idea principal es la siguiente:
  - Un proceso es libre del pasado si la probabilidad que un suceso ω ocurre en un intervalo (T, T+t) es independiente de su ocurrencia antes de T

Proceso markoviano II

- => un PE es de tipo Markov si y solamente si se cumple para todos los t_i, x^i

$$\mathbf{Pr\{X(t_{i+1}) = x_{i+1} / X(t_i) = x_i, X(t_{i-1} = x_{i-1}) \ldots X(t_0)=x_0 \}}$$
$$\mathbf{=!\ Pr \{X(t_{i+1}) = x_{i+1} / X(t_i = x_i\}}$$

- La condición libre de efectos del pasando en un PE markoviano tiene cumplirse para **todos los x_i** especialmente debe ser valido la transición de un estado a si mismo

$$\mathbf{Pr\{X(t_{i+1}) = x_{i+1} / X(t_i) = x_i, X(t_{i-1}) = x_{i-1} \ldots X(t_0)=x_0 \} =!}$$
$$\mathbf{Pr \{X(t_{i+1}) = x_{i+1} / X(t_i) = x_i\}}$$
$$\mathbf{con\ x_{i+1}=x_i = x_{i-1} \ldots = x_0}$$

Proceso markoviano III

- => en un PE de Markov la FDP temporal que indica la duración en que un PE no cambia su estado debe ser sin memoria

- Desde la teoría de la probabilidad resulta que hay solamente dos FDP que cumplen esta condición,

- la FDP exponencial negativa para t continua

  $$\mathbf{f_T(t) = \alpha * \exp(-\alpha*t)}$$ y

- la FDP geométrica para t discreto

  $$\mathbf{pn = \alpha*(1-\alpha)^{n-1}}$$

- En la práctica hay varios PE que cumplen la condición de ser libre de efectos del pasado para

$$\mathbf{x_{i+1} =/ x_i} \textbf{ pero no para } \mathbf{x_{i+1}=x_i}$$

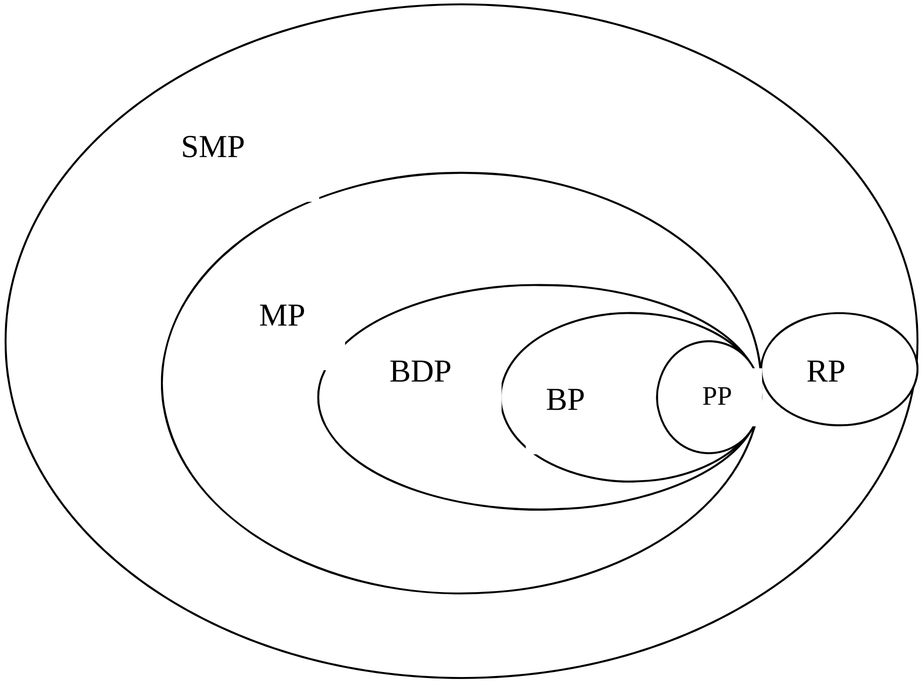
- Estos proceso se llaman semi-markoviano o proceso markoviano incluido

- Ejemplo el proceso de renovación es un proceso semi-markoviano

Classification I

- **Cadena de Markov** (Markov Chaín)
  - Un proceso markoviano con estados discretos se llama cadena de Markov
  - Similar a las procesos semimakroviano cadena de markov incluido (embebed Markov Chaín)
- **Proceso de nacimiento y muerte** (birth death process)
  - Es un cadena de Markov solamente existen transiciones a sus estados vecinos
  - pi,j mayor que cero para j=i+1 y j=i-1 y cero para los otros casos
- **Proceso de nacimiento** (birth process)
  - Es un proceso de nacimiento y muerte donde las probabilidades de transición de pi a pi-1 son cero
- **Proceso de muerte** (death process)
  - Es un proceso de nacimiento y muerte donde las probabilidades de transición de pi a pi+1 son cero
- **Proceso de renovación** (renewal process)
  - Es una cadena semi-markoviano con solamente transiciones a si mismo i a i y al estado vecino i a i+1. La fdp de duración dentro de un estado puedes ser cualquiera pero idéntico y igual distribuido (iid)

Classification II



SMP Semi Markov Process

MP Markov Process

BDP Birth Death Process

BP Birth Process

PP Poisson Provess

RP Renewal Process

- Una DTMC se define como un proceso estocástico en tiempo discreto y libre del efecto de pasado.
- Los datos principales que describen una DTMC son las probabilidades de transición

$$\mathbf{p_{ij}(n-1,n) := Pr\{X_n=j \,/\, X_{n-1} = i\}}$$

para todos los pasos n=0,1,2…. y todos las parejas de estados i,j

- nos limitamos a una DTMC homogéneo (**HDTMC**) que resulta:

$$\mathbf{p_{ij} = p_{ij}(n-1,n)}$$

para todos los n=0,1,2… y todos las parejas de estados i,j

- Lo que se quiere solucionar desde el modelo de una HDTMC es de calcular dos tipos de probabilidades:

  i. Probabilidad absoluta en función de n = 0,1,2…

     $\mathbf{p_i(n) := Pr\{X_n = i\}}$**,** para todos los estados i

  ii. Probabilidad absoluto en el estado de estacionaridad SSC, bajo la condición de que exista, (llamada también estado ergodico)

     $\mathbf{p_i := \lim_{n\to\infty} Pr\{X_n=i\}}$ para todos los estados i

- En una DTMC se define la probabilidad de transición del estado i al estado j en m pasos como:

$$p_{ij}(m) := Pr\{ X_{n+m}=j / X_n = i)$$

- de que resulta la **Ecuación de Chapmann Kolmogorov** para HDTMC
- $p_{ij}(m) = \Sigma_{k=1...S}\ p_{ij}(m-1)*p_{kj}$ donde S representa el número de estado de la HDTMC

Estado accesibles

el estado j se puede acceder desde el estado i si su probabilidad de transición en m pasos es mayor que cero

=> existe un m>=1 con $p_{ij}^{(m)} > 0$

Estados comunicables

los estados i y j son comunicable si j es accesible desde i y inverso

Estado absorbente

un estado i es absorbente si su probabilidad de transición a si mismo es uno

=> $p_{ii} = 1$

Cadena irreducible

Una HDTMC es irreducible si todos sus parejas de estados son comunicable

Estado periódico

un estado i es periódico con periodo p si su probabilidad de transición en p*n pasos es mayor que cero y es cero en todos los otros casos

$\Rightarrow$**existe un p>1 con $p_{ii}^{(p*n)} > 0$ y $p_{ii}^{(m)} = 0$**
para n=1,2,.. m =/ p+n donde p indica el periodo

Estado aperiódico

Un estado es aperiódico si p=1

Repetición de un estado I

La probabilidad de la repetición en n pasos de un estado se define con el hecho que se puede volver desde un estado a si mismo solamente a partir de n pasos

$$f_i(n) := Pr\{ X_n = i \,/\, X_v \neq i \;\; v = 1\ldots n-1 \;\; X_0 = i \}$$

Si se suma las probabilidad de repetición sobre todos los n se calcula la **probabilidad global de repetición** de un estado

$$f_i = \sum_{n=1..\infty} f_i(n)$$

=> número de medio de pasos para repetir

$$E[\tau_i] = \sum_{n=1..\infty} n^* f_i(n)$$

Repetición de un estado II

Estado repetido (recurrent state)

Un estado i de una HDMC es repetido non-nulo si

$$\mathbf{f_i = 1 \text{ y } E[\tau_i] <= K < \infty}$$

{Un estado i de una HDMC es repetido nulo si $f_i = 1$º y $E[\tau_i] \rightarrow \infty$}

Estado transitorio

Un estado es transitorio si $f_i < 1$

Cadena irreducible

Una HDMC es irreducible si todas sus parejas de estados son comunicable

Teorema 1

Los estados de una HDTMC irreducible son todos
•Transitorios o
•Repetido o
•Repetido nulo o periódicos con misma periodo p

Teorema 2

En una HDMC aperiódico se cumple:

i) La probabilidad absoluta p_i := lim $n \rightarrow \infty$ $Pr\{X_n = i\}$ existe y es independiente de la distribución del estado inicial p_i (0).

ii) Todos los estados son repetidos non-nulo con

$$\mathbf{p_i = 1/\tau_i \; ; \; \sum p_i = 1; \;\; p_i = \sum_k p_k * p_{ki}}$$

o

todos los estados son nulo con $\mathbf{p_i = 0}$

Modelo matemático de una HDTMC

- Dados las probabilidades de transición p_{ij} una HDMC se representa por completo por su matriz estocástico con M filas y M columnas (M numero de estados de la HDMC)
  - La suma de probabilidades por cada fila es uno

$$\underline{\mathbf{P}} = [p_{ij}] \ \text{ con } 0 <= p_{ij} <= 1 \text{ y } \sum_{j=1..M} p_{ij} = 1$$

  - Inversamente cualquier matriz P con M filas y M columnas que cumple las condiciones anteriores representa una HDTMC
- La cadena del HDTMC se puede visualizar por el grafo de transición entre los estados
  - El grafo de transición se forma por un (Pseudo) Grafo G(V,A) con V conjunto de los estados (v_1,…v_M) y A conjunto de arcos de transición (v_i,v_j) para p_{ij} >0

La solución general del HDMC resulta de las ecuaciones de Chapman Kolmogorov con la solución de la siguiente ecuación matricial lineal

$$\underline{p}(n) = \underline{p}(0) * \underline{P}^n \text{ y } \sum_{i=1..M} p_i(n) = 1$$

$\Rightarrow$ una HDTMC se describe por completo por su matriz estocástico $\underline{P}$ y las probabilidades iniciales $\underline{p}(0)$

Se distinguen dos soluciones:

i. Solución general en función de los pasos temporales
ii. Solución de convergencia a la estacionaridad (SSC, estado ergodico) a partir de un número de pasos temporales suficiente alta

En la practica interesa generalmente solamente las probabilidades en el estado ergodico que resulta como solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\underline{p} = \underline{p} * \underline{P} \quad y \quad \sum_i p_i(n) = 1$$

La solución general se puede calcular mediante la transformación de Z con

$$\mathcal{P}(z) := \sum_{v=0\ldots\infty} \underline{p}(v) * z^v$$

que resulta

$$\mathcal{P}(z) = \underline{p}(o) * [I - z * \underline{P}]^{-1}$$

Ejemplo Voz sobre ATM I

VOZ sobre ATM
mediante cadena de Markov
discreto

tt [ms]		132	ts [ms]		132	
vc [kbit/s]		16	AAL [oct]		44	
duracion celula [ms]		22				
number of voice cells	nt		6			
number of empty cells	ns		6			
prob inicial		1	0			
prob de restar en t	ptt		0,857142857	prob abs	pt	0,5
prob de restar en s	pss		0,857142857		ps	0,5
	s		t	vel med	vmed	8
Matrix de transicion P s		**0,857142857**	**0,142857143**		sigma	8
t		**0,142857143**	**0,857142857**		Id	8

		s	t
Matrix de transicion P	s	**0,857142857**	**0,142857143**
	t	**0,142857143**	**0,857142857**
P^2		0,755102041	0,244897959
		0,244897959	0,755102041
P^4		**0,630154102**	**0,369845898**
		0,369845898	**0,630154102**
P^8		0,533880181	0,466119819
		0,466119819	0,533880181
P^16		**0,502295733**	**0,497704267**
		0,497704267	**0,502295733**
P^32		0,500010541	0,499989459
		0,499989459	**0,500010541**
P^64		**0,5**	**0,5**
		0,5	0,5

Ejemplo Voz sobre ATM III

n	p0(n)	p1(n)	t [ms]
0	1,0000	0,0000	0
1	0,8571	0,1429	22
2	0,7551	0,2449	44
3	0,6822	0,3178	66
4	0,6302	0,3698	88
5	0,5930	0,4070	110
6	0,5664	0,4336	132
7	0,5474	0,4526	154
8	0,5339	0,4661	176
9	0,5242	0,4758	198
10	0,5173	0,4827	220
11	0,5123	0,4877	242
12	0,5088	0,4912	264
13	0,5063	0,4937	286
14	0,5045	0,4955	308
15	0,5032	0,4968	330
16	0,5023	0,4977	352
17	0,5016	0,4984	374
18	0,5012	0,4988	396
19	0,5008	0,4992	418
20	0,5006	0,4994	440
21	0,5004	0,4996	462
22	0,5003	0,4997	484
23	0,5002	0,4998	506
24	0,5002	0,4998	528
25	0,5001	0,4999	550
26	0,5001	0,4999	572
27	0,5001	0,4999	594
28	0,5000	0,5000	616

- Se puede interpretar como una HDTMC donde el intervalo temporal converge contra cero
- Resulta la ecuación general de Champan Kolmogorow

$$\mathbf{p_{ij}(t_1,t_2) = \sum_{k=1..M} p_{ik}(t_1,t_h)*p_{kj}(t_h,t_2)}$$

valido para todos los $t_1 <= t_h <= t_2$

Cadena de Markov homogéneo en tiempo continuo (HCTMC) II

considerando que la cadena es homogéneo y seleccionando los siguientes valores temporales:

$$t_1 = 0;\quad t_h = \tau;\quad t_2 = \tau+\Delta\tau$$

resulta para las probabilidades de transición

$$\mathbf{p_{ij}\ (\tau + \Delta\tau) = \sum_k p_{ik}(\tau) * p_{kj}(\Delta\tau)}$$

o en forma matricial

$$\underline{\mathbf{P}}\ (\tau + \Delta\tau) = \underline{\mathbf{P}}\ (\tau) * \underline{\mathbf{P}}\ (\Delta\tau)$$

Lo mismo resulta por la probabilidad absoluta de los estados

$$\mathbf{p_{j}\ (\tau + \Delta\tau) = \sum_k p_{k}(\tau) * p_{kj}(\Delta\tau)}$$

o en forma matricial

$$\underline{\mathbf{p}}\ (\tau + \Delta\tau) = \underline{\mathbf{p}}\ (\tau) * \underline{\mathbf{P}}\ (\Delta\tau)$$

La ecuación de Chapman Kolmogorow en adelante y el generador infitisimal I

Introducimos las siguientes anotaciones:

$dp_{ij}(\tau)/d\tau := \lim \Delta\tau\rightarrow 0\ [p_{ij}(\tau+\Delta\tau) - p_{jj}(\Delta\tau)]/\Delta\tau$
$q_{kj} := \lim \Delta\tau\rightarrow 0\ p_{kj}(\Delta\tau)/\Delta\tau$
$q_{jj} := \lim \Delta\tau\rightarrow 0\ [p_{jj}(\Delta\tau) - 1]/\Delta\tau$

entonces resulta la Ecuación de Chapman Kolmogorow en adelante por

$$\mathbf{dp_{ij}(\tau)/d\tau = \sum_{k=/\,j} p_{ik}(\tau) * q_{kj} + p_{ij}(\tau) * q_{jj}}$$

y en forma vectorial

$$\mathbf{d\underline{P}(\tau)/d\tau = \underline{P}(\tau) * \underline{Q}}$$

con

Q denominado generador infitisimal

aplicando el mismo esquema resulta para las probabilidades absolutas resulta

$$\mathbf{dp_j(\tau) / d\tau = \sum_{k=/\,j} p_k(\tau) * q_{kj} + p_i(\tau) * q_{jj}}$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{d\underline{p}(\tau) / d\tau = \underline{p}(\tau) * \underline{Q}}$$

=> la solución de la probabilidad absoluta de los estados de una HCTMC esta dado por un sistema de ecuaciones diferenciales y requiere conocer $\underline{Q}$ y la probabilidad inicial $\underline{p}(0)$ del sistema

Interpretación de los elementos del generador infitisimal **Q**

$q_{ij}*\Delta\tau$ para i=/ j

indica la probabilidad de transición del estado i a j en un intervalo de tiempo infitisimal (q_{ij} proporciona la tasa de probabilidad de transición de i a j)

$-q_{jj}*\Delta\tau$

indica la probabilidad de transición del estado j a cualquier estado k =/j en un intervalo de tiempo infitismal

=> $\sum_{i=1..M} q_{ik} = 0$

En el estado ergodico resulta que las valores de probabilidades queden estable y no oscilan con el tiempo
Resulta:

$$\lim_{\tau \to \infty} dp_{ij}(\tau)/d\tau = 0$$

La convergencia a la estacionalidad (SSC) de una HCTMC II

para el calculo de las probabilidades absolutos

$$\lim_{\tau \to \infty} p_j(\tau) =: p_j$$

resulta un sistema de ecuaciones lineares cuya solución no depende del estado inicial del sistema

$$0 = \sum_{k \neq j} p_k * q_{kj} + p_j * q_{jj} = \sum_k p_k * q_{kj}$$

o en forma vectorial

$$0 = \underline{p} * \underline{Q} \text{ y } \sum_k p_k = 1$$

=> bajo el SSC las solución de una HCTMC resulta del generador infitisimal (matriz Q) y requiere solamente la solución de una sistema de ecuaciones lineales

Comparación entre el modelo de la HDTMC & HCTMC

Tipo	HDTMC	HCTMC
Ecuación general	$\underline{p}(n+1) = \underline{p}(n) * \underline{P}$	$d\underline{p}(\tau)/d\tau = \underline{p}(\tau) * \underline{Q}$
Convergencia a la Estacionario	$\underline{p} = \underline{p} * \underline{P}$	$\underline{0} = \underline{p} * \underline{Q}$
Característica de la Matriz	$\sum_{k=1..N} p_{jk} = 1$	$\sum_{k=1..N} q_{jk} = 0$
fdp sobre el tiempo en un estado	$p_{ii}^{(n)} = p_{ii}^{(n)} * (1- p_{ii})$	$f_{\tau i}(t) = -q_{ii} * e^{-qii*t}$

GRUPO DE INGENIERÍA TELEMÁTICA

Ejemplo Fuente Multimedia I

- La tabla indica en la parte amarilla los datos de una fuente multimedia de dos componentes:
  - Voz con dos estados cero silencia y uno activo
  - Video con dos estados cero información sobre el cambio del último imagen uno información sobre el imagen actual

multimedia source

input date	voz	video
t0 ms	600	200
t1 ms	400	50
v0 kbit/s	0	32
v1 kbit/s	32	128
p0	0,6	0,8
p1	0,4	0,2

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Ejemplo Fuente Multimedia II

- Asumimos que las dos componentes de la fuente no tengan correlación (realizan sus cambios de esto de cero a uno y inverso independientemente)
  - Entonces podemos modelar la fuente como una cadena Markov de cuarto estados y la probabilidad de cada estado se calcula a base de las probabilidades de los estados de sus componentes
  - Resulta: $\mathbf{p_{ij} = p_i * p_j}$
  - De las probabilidades de los estados y de su velocidad que generan resulta el primer y el segundo momento del origen (64 kbit/s para el valor medio y 5816,32 (kbit/s)2 para el segundo momento

State [voz, video]	State Prob	State vel.	1º moment or.	2º moment or
[0,0]	0,48	32	15,36	491,52
[0,1]	0,12	128	15,36	1966,08
[1,0]	0,32	64	20,48	1310,72
[1,1]	0,08	160	12,8	2048
Suma	1		64	5816,32

Ejemplo Fuente Multimedia III

La tabla sumaria las valores características de la fuente multimedia compuesto por voz y video

Con estos datos se permite estimar la capacidad completa que requiere un dispositivo que enruta el trafico correspondiente a M fuentes con las misma características

sumary one source	
mean vel. Kbit/s	64
max vel kbit/s	160
Varianz (kbit/s)^2	1720,32
standard dev. Kbit/s	41,47674047
burstiness	2,5
Indice de disp kbit/s	26,88

Se calcula con la siguiente formula

$$v_t = M*E(v_1) + \gamma* (M)^{0,5} * \sigma(v_1)$$

y la capacidad equivalente a una fuente dentro de los M fuentes

$$v_1(M) = E(v_1) + \gamma*\sigma(v_1) / (M)^{0,5}$$

Ejemplo Fuente Multimedia IV

- Con el factor γ = 2,5 resultan los valores indicado en la tabla resultando:
  - Observamos como la capacidad equivalente a una fuente dentro de los M fuentes converge con M creciente contra el valor medio requerido por una fuente que indica el efecto de la multiplexación estocástica
  - El valor del factor depende de los parámetros QoS requerido por el servicio

multiple sources	factor		2,5		
M	vt	veq	M	vt	veq
1	160	160	10	967,902	96,79
2	274,642	137,321	20	1743,724	87,186
3	371,6	123,867	30	2487,944	82,931
4	463,384	115,846	40	3215,805	80,395
5	551,862	110,372	50	3933,212	78,664
6	637,992	106,332	60	4643,194	77,387
7	722,343	103,192	70	5347,548	76,394
8	805,285	100,661	80	6047,448	75,593
9	887,076	98,564	90	6743,707	74,93
10	967,902	96,79	100	7436,919	74,369

Ejemplo Fuente Multimedia V

Las diagramas indican la función de la capacidad equivalente de una fuente dentro de M fuentes en relación con M