GRUPO DE
INGENIERÍA
TELEMÁTICA

Redes de Comunicación

Curso de la teoría de probabilidad con aplicaciones desde el campo de las telecomunicaciones

Instructor:
Dr.-Ing. K. D. HACKBARTH
Ultima versión 01.10. 2010

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

- Para solucionar problemas en las telecomunicaciones usamos **modeles** donde un modelo representa en forma aproximativo el problema a solver
- Se puede desarrollar un **modelo matemático** en el caso que el problema tiene la propiedad de medidas mediante experimentos
- Un **modelo deterministico** resulta si en un experimento resulta siempre el mismo resultado bajo condiciones iguales
- Un experimento aleatoria resulta si el resulta no es previsible
- Un **modelo de probabilidad** resulta de un experimento aleatorio donde bajo una larga repetición se consigue un resultado regular (**regularidad estadística**)

Sea las posibles resultados en un experimento aleatoria $x_1, x_2, \ldots x_K$ y el experimento se repite n veces entonces se define **la frecuencia relativa** como

$$f_k(n) = N(x_k)/n$$

El experimento tiene regularidad estadística si la frecuencia relativa converge contre un valor constante que se llama **probabilidad**

$$\lim_{n \to \infty} f_k(n) = p_k \quad \text{y resulta} \quad \Sigma_{k=1\ldots K} N(x_k) = n$$

- Sea C el suceso que ocurre A o B (donde A y B no pueden ocurrir simultáneamente entonces se cumple

$$f_c(n) = f_A(n) + f_B(n)$$

- La definición (clásica) de la probabilidad basando en la frecuencia relativa causa varios problemas:
  - Requiere la existencia de este límite
  - No se puede realizar un experimento infinitamente
  - Excluye aplicar modelos probabilísticas en los casos donde no se puede realizar un experimento

Como consecuencia se define la teoría moderna de probabilidad mediante un sistema axiomático donde se cumple para los sucesos

P(A) ε [0,1] para todos los sucesos A c S

P(S) = 1

P[A o B] = P(A) + P(B)

Con

A y B no pueden ocurrir conjuntamente

S es el conjunto de los posibles susecos

- Los **sucesos elementales** Ω de un modelo probabilístico se compone de los sucesos que no se puede descomponer en un conjunto de otros sucesos del mismo modelo
- El conjunto de todos los sucesos elementales Ω puedes formar un espacio que es:
  - Contable finito
  - Contable infinito
  - Incontable infinito
- Un conjunto contable forma un espacio discreto mientra un incontable un espacio continuo

Conceptos básicos II

- del conjunto de sucesos elementales se puede formar diferentes conjuntos de sucesos y
- se define $\mathcal{A}$ $(\Omega, \mathcal{A})$ como una **algebra de sucesos** si cumple las siguientes condiciones:
  - Ω ε $\mathcal{A}$
  - A ε $\mathcal{A}$ implica notA ε $\mathcal{A}$
  - A ε $\mathcal{A}$ y B ε $\mathcal{A}$ implica (A u B) ε $\mathcal{A}$ y (A ∩ B) ε $\mathcal{A}$
- el conjunto puede ser de más que una dimensión que vemos más adelanta
- Cada $\mathcal{A}$ contiene dos sucesos principales:
  - Ω suceso cierto
  - Φ suceso nulo

Conceptos básicos III

- A cada suceso aleatorio A ε $\mathcal{A}$ se asigna un número real denominado **probabilidad** de A que cumple los siguientes condiciones:
  - Pr{A} ε [0,1]
  - Pr{Ω} = 1
  - Si $A_1 \ldots A_n$ son independiente por parejas si cumple el **teorema de adición**
  - $Pr\{A_1+A_2+\ldots A_n\} = \sum_{i=1\ldots n} Pr\{A_i\}$
- Se define los siguientes operadores:
  - A + B := A U B
  - A * B := A ∩ B
- El triple resultante (Ω, $\mathcal{A}$, Pr) se define el **espacio de probabilidad**

Conceptos básicos IV

Símbolo	Termino en la algebra de conjuntos	Termino en la algebra de sucesos
Ω	Conjunto	Espacio de los sucesos elementales
ω	Elemento	Suceso elemental
A, B	Subconjuntos	Sucesos aleatorios
A + B	Unión	Suma
A * B	Intersección	Producto
A \ B	Diferencia	Diferencia
A*B = Φ	Disjunto	Incompatible o independiente
A = B	Igualdad	Igualdad
A C B	Subconjunto	Suceso A implica suceso B

- La probabilidad de un suceso A sin condiciones acciónales se denomina **probabilidad incondicional** o absoluta anotando

$$\Pr\{A\}$$

- La probabilidad de un suceso A bajo la condición de un suceso B (solamente si existe Pr{B} >0) se denomina **probabilidad condicional** y se define por

$$\Pr\{A/B\} := \Pr\{A*B\} / \Pr\{B\}$$

De esta definición resulta:

- Dos sucesos A y B son (estocásticamente) **independiente** si $Pr\{A/B\} = Pr\{A\} \Leftrightarrow Pr\{B/A\} = Pr\{B\}$

- **Teorema de multiplicación**
  - Si A y B son independientes => $Pr\{A*B\} = Pr\{A\}*Pr\{B\}$
  - Si $A_1 \ldots A_n$ son independiente por cualquier tuple de $(A_1..A_n)$ => $Pr\{A_1,..A_n\} = \Pi_{i=1..n} Pr\{A_i\}$

- Se puede calcular la probabilidad del producto de dos sucesos con

$$Pr\{A*B\} = Pr\{A/B\}*\ Pr\{B\}$$
$$Pr\{A*B\} = Pr\{B/A\}*\ Pr\{A\}$$

Teorema de probabilidad total

- Sea A_i i=1..n una partición de $\mathcal{A}$ de forma que A_i son independiente por pareja ($Pr\{A_i * A_j\} = 0$) y $\sum_{i=1\ldots n} Pr\{A_i\} = 1$)
- Existe un suceso B en relación con uno de los sucesos A_i (existe un A_i => suceso B)
- Se conocen las probabilidades $Pr\{A_i\}$ i =1…n y $Pr\{B/A_i\}$
- Resulta la **probabilidad total** con

$$Pr\{B\} = \sum_{i=1\ldots n} Pr\{A_i\} * Pr\{B/A_i\}$$

Teorema de Bayes

- Sea A_i i=1..n una partición de $\mathcal{A}$ como en el teorema de la probabilidad total
- Se conocen las probabilidades $Pr\{A_i\}$ i =1…n, $Pr\{B/A_i\}$ y $Pr\{B\}$
- Resulta con las **formulas de Bayes**

$$Pr\{A_i/B\} = Pr\{A_i\}*Pr\{B/A_i\} \ / \ \sum_{j=1\ldots n} Pr\{A_j\}*Pr\{B/A_j\}$$

- con el teorema de probabilidad total y la definición de la probabilidad condicional resulta

$$Pr\{Ai/B\} = Pr\{B*Ai\} \ / \ Pr\{B\}$$

- En la mayoría de los sistemas aleatorio el resultado se expresa por un valor numérico
- En los casos donde ese no ocurre se puede asignar a cada resultado del sistema aleatorio un valor numérico
- Como los sucesos aleatorios $\mathcal{A}$ se componen de correspondientes sucesos elementales Ω basta de conocer los valores numéricos Ω
- Formalmente se define la **variable aleatoria** X como

$$\mathbf{X: \quad \Omega \rightarrow S \subset IR}$$

- S define el **dominio de los valores de la variable aleatoria**

- Atontamos con
- X, Y … los variables aleatorios (v.a.) y con x, y el valor concreto de una realización

$$X(\Omega) = x_\omega \text{ con } \omega \in \Omega \text{ y } x_\omega \in S$$

- Se distingue entre variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas.
- En esta asignatura nos limitamos a variables aleatorias positivas y cero

Denominamos como

- **Variable aleatoria discreta** $X \varepsilon S \subset IN \cup \{0\}$
- En el caso que el dominio de las valores de la v.a. es finito la v.a. es **finito** en el contrario es **contable**
- **Variables aleatorias continuas** $X \varepsilon S \subset IR^{+} \cup \{0\}$ En caso de una v.a. continua si S = [a,b] la v.a. se denomina **compacto** en contrario S= (a,b) la v.a. no es compacto
- Se observa que v.a. continuas ni son contables ni finito
- En algunos casos aproximamos una v.a. discreta por una v.a. continua sobre todo si el número de los valores discretos es alto

- Sea A un suceso con un valor x en su v.a. resulta

$$\mathbf{A(X=x) = \{\omega / X(\omega) = x\}}$$

$$\mathbf{Pr\{X=x\} = Pr\{A(X=x)\} = \Sigma_{\omega / X(\omega) = x} Pr\{\omega\}}$$

- Se observa que la asignación de una v.a. a los sucesos no cambia el sistema aleatoria entonces resulta

$$\mathbf{\{X, Pr\} \Leftrightarrow \{\Omega, \mathcal{A}, Pr\}}$$

- Una vez asignado una v.a. a un sistema de probabilidad se pueden definir funciones que relacionen el valor de la v.a. con su probabilidad
- En la teoría de la probabilidad se aplica la **función de distribución de probabilidad (FDP)**

$$F_X(x) := \Pr\{X \leq x\}$$

- Desde la FDP se deduce la **función de densidad de probabilidad (fdp)** (en la literatura también bajo el nombre función de masa de probabilidad)
- Adicionalmente se deduce desde la FDP la **función de distribución de probabilidad complementaria**

$$F_X^c(x) := \Pr\{X > x\} = 1 - F_X(x)$$

- La FDP cumple las siguientes características
  i. $F_X(x) \geq 0$
  ii. $F_X(x)|_{x=0} = 0$
  iii. $F_X(x)\ |_{x\to\infty} = 1$
  iv. de $x1 \leq x2 \Rightarrow F_X(x1) \leq F_X(x2)$

- La fdp en el caso de una **v.a. discreto** resulta

$$\mathbf{p_n := Pr\{X=n\}}$$

que permite calcular la FDP en cualquier punto x con

$$F_X(x) := \sum_{n=0\ldots x} p_n$$

Función de distribución de probabilidad III

- La fdp en el caso de una **v.a. continua** -en el caso que existe- es la primera derivada de $F_X(x)$

$$\mathbf{f_X(x) := dF_X(x)/dx}$$

- que cumple las siguientes características

i. $f_X(x) \geq 0$

ii. $\int_0^\infty f_X(x) = 1$

iii. $F_X(x) = \int_0^x f_X(x)dx$

iv. $Pr\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$

- Se observa que la asignación de la FDP o fdp a la v.a no cambia el sistema aleatoria entonces resulta

$$\{X, Pr\} \Leftrightarrow \{\Omega, \mathcal{A}, Pr\} \Leftrightarrow F_X(x) \Leftrightarrow f_X(x)$$

- A un sistema de probabilidad {Ω, A, Pr} se pueden asignar varios variables aleatorias $X_1 \ldots X_n$
- Nos limitamos a dos v.a. X_1 y X_2 pero el concepto se puede sencillamente generalizar
- Sea A un suceso con

$$A(X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2) = \{\omega \,/\, X(\omega) \leq x1 \,;\, X(\omega) \leq x_2\}$$

- La FDP en el caso de X1 y X2 continuo resulta

$$F_{X1X2}(x_1, x_2) := \Pr\{X_1 \leq x_1 \,;\, X_2 \leq x_2\}$$

- Desde una FDP de dos v.a. resulta:

$$\lim_{x1\to\infty,\ x2\to\infty} F_{X1X2}(x_1,x_2) = 1$$
$$\lim_{x1\to 0,\ x2\to 0} F_{X1X2}(x_1,x_2) = 0$$

- y se deducen las dos FDP marginales

$$F_{X1}(x_1) = \lim_{x2\to\infty} F_{X1X2}(x_1,x_2)$$
$$F_{X2}(x_2) = \lim_{x1\to\infty} F_{X1X2}(x_1,x_2)$$

Tuples de variables aleatorias III

- La fdp en el caso de X_1 y X_2 continuo resulta

$$f_{X1X2}(x_1,x_2) := dnF_{X1X2}(x_1,x_2)/dx_1dx_2$$

- se deducen las dos fdp marginales

$$f_{X1}(x_1) = \int_0^\infty f_{X1X2}(x_1,x_2)dx_2$$

$$f_{X2}(x_2) = \int_0^\infty f_{X1X2}(x_1,x_2)dx_1$$

- En el caso de una v.a. discreta resulta para la fdp y FDP

$$p_{n1n2} := \Pr\{X_1=n_1;X_2=n_2\}$$
$$F_{X1X2}(n_1,n_2) = \sum_{i1=0\ldots n1}\sum_{i2=0\ldots n2} p_{n1n2}$$

- En un sistema aleatorio con dos v.a. los dos v.a. pueden ser estocásticamente independiendo o no que se puede verificar con el siguiente teorema sea la FDP o la fdp esta dado

Teorema sobre la independencia de dos v.a.

- Dos v.a. son estocasticamente independiente si y solamente si la FDP común es igual al producto de las dos FDP's marginales, lo mismo vale por la fdp y resulta

$$F_{X1X2}(x_1,x_2) = F_{X1}(x_1)*F_{X2}(x_2) \text{ o}$$
$$f_{X1X2}(x_1,x_2) = f_{X1}(x_1)*f_{X2}(x_2)$$

- Con dos v.a. X_1, X_2 que no son independiente se puede expresar la fdp de X_1 condicionado a X_2 bajo la condición que $f_{X2}(x_2) \neq 0$, lo mismo vale por X_2 condicionado a X_1

$$f_{X1X2}\,(x_1/x_2)= f_{X1X2}((x_1,x_2)/f_{X2}(x_2)$$
$$f_{X1X2}\,(x_2/x_1)= f_{X1X2}((x_1,x_2)/f_{X1}(x_1)$$

- En las telecomunicaciones hay sistemas deterministicas con interferencia de señales aleatorias
- Matemáticamente se expresa por la transformación de una variable aleatoria por una función determinística
- Un ejemplo en esta asignatura es la transformación de la longitud de paquete al tiempo de procesamiento o transmisión o en general al tiempo de duración en uno o varios servidores
- Sea X la v.a. con su FDP $F_X(x)$ y su fdp $f_X(x)$ y
- $y=g(x)$ una función bijectivo con $x= g^{-1}(y)$
- entonces resulta:

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] * [\delta g^{-1}(y)/\delta y]$$

- el concepto se puede expander a tuples de v.a. donde resulta por dos v.a. X_1, X_2

$$f_{Y1Y2}(y_1,y_2) = f_{X1X2}[g_1^{-1}(y_1,y_2),\ g_2^{-1}(y_1,y_2)] * \det[\delta(x_1 x_2)/\delta(y_1 y_2)]$$

con

$$\det[\delta(x_1 x_2)/\delta(_{y1} y_2)] = \det\{\ \delta g_i^{-1}(x_1,x_2)/\delta y_j\}$$

la determinante funcional

- el resultado de la transformación con dos v.a. se puede aplicar para deducir la **fdp de la suma de dos v.a.**
- Sea $Y = X_1 + X_2$ con fdp $f_{X1}(x_1)$ y $f_{X2}(x_2)$
- resulta para la fdp de Y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X1}(y-x_2) * f_{X2}(x_2) dx_2$$

- este integral describe la **convolución** de $f_{X1}(x_1)$ y $f_{X2}(x_2)$ resultando

$$f_Y(y) = f_{X1}(x_1) (*) f_{X2}(x_2)$$

- desde la transformación de Laplace resultad que la convolución en el dominio original se transforma en una multiplicación en el dominio transformado

$$F_Y(s) = F_{X1}(s_1) * F_{X2}(s_2)$$

- En la teoría de la probabilidad se deducen de una v.a. unos valores características denominado momentos estadísticos
- Los dos momentos más conocidos son la esperanza o el valore medio y la varianza o dispersion
- Desde el punto de vista práctica ambos valores se pueden conseguir mediante observación y medidas del sistema aleatorio y desde ambos valores se pueden deducir aproximaciones por la FDP
- Para aproximaciones mas exactas se pueden usar momentos superiores seleccionados desde la generalización del concepto de momentos
- De la esperanza y la varianza se deducen otros parámetros estadísticos

- El valor medio o la **esperanza de una v.a. discreta** X con finitos o infinitos valores k=0…∞ valores se defino como:

$$E(X) := \Sigma_{k=0\ldots\infty}\, x_k{}^* p_{xk}$$

- El valor medio o la **esperanza de una v.a. continuo** X se defino como:

$$E(X) := \int_0^\infty x^* f_X(x) dx$$

Teorema sobre la **esperanza de una suma lineal** de v.a.

- Sea

$$Y = \Sigma_{n=1\ldots N}\, c_n{*}X_n$$

- donde los N v.a. no sean necesariamente independiente y c_n una número real entonces se cumple

$$E(Y) = \Sigma_{n=1\ldots N}\, c_n{*}E(X_n)$$

Teorema sobre el la **esperanza de un producto** de v.a.

- Sea

$$Y= \Pi_{n=1\ldots N}\, X_n$$

- donde los n v.a. X_n son independiente entre si entonces se cumple

$$E(Y) = \Pi_{n=1\ldots N}\, E(X_n)$$

- La **varianza de una v.a. discreta** X con finitos o infinitos valores k=0…∞ valores se defino como:

$$V(X) := \Sigma_{k=0\ldots\infty} [xk-E(X)]^2 * p_{xk}$$

- De que resulta:

$$V(X)= E(X^2) – [E(X)]^2$$

- La **Varianza de una v.a. continuo** X se defino como:

$$V(X) := \int_0^\infty [x-E(X)]^2 * f_X(x)dx$$

- de que resulta

$$V(X) = \int_0^\infty x^2 * f_X(x)dx – [E(X)]^2$$

La varianza II

- Teorema sobre la **Varianza de una suma lineal** de v.a.
- Sea

$$Y = \Sigma_{n=1\ldots N}\, c_{n*}X_n$$

- con N v.a. independiente y c_n una número real entonces se cumple

$$V(Y) = \Sigma_{n=1\ldots N}\, c_n^{2}*V(X_n)$$

- Teorema sobre la **translación de una v.a.**
- Sea

$$Y = X+c \Rightarrow V(Y) = V(X)$$

- con c número real, Entonces la translación de una v.a. por una constante no cambia el valor de la varianza se denomina también el **primer momento por el origen** y

$$E(X) = m_1(X)$$

- el **segundo momento por el origen** y más en general

$$E(X^2) = m_2(X)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$E(X^n) = m_n(X)$$

- el **n-te momento por el origen**
- resulta

$$V(X) = \sigma^2(X)$$

- V(x) se denomina también el **segundo momento central** y más en general

$$\sigma^n(X) = E[X-m_1(X)]^n$$

- es el **n-te momento central**
- nota que $\sigma^1(X) = 0$

- $\sigma(X) = [V(X)]^{*0,5}$ se denomina la desviación Standard o **desviación típica**
- $C(X) = \sigma(X)/E(X)$ es el **coeficiente de la variación** de una v.a.
  - Nota que C(X) no tiene ninguna dimensión y cumple $C(X) \geq 0$
- $Id((X) = V(X)/E(X)$ **índice de dispersión**
  - Nota que Id(X) tiene la misma dimensión como la v.a. y cumple $Id(X) \geq 0$
- $B(X) = Max(X)/E(X)$ **burstiness**
  - Nota que la burstiness no tiene dimensión y cumple $B(X) \geq 1$

- Los **momento (j,k) por el origen** común de dos v.a. discretos X, Y están dado en el caso de v.a. discretas por

$$E(X^j,Y^k) := \Sigma_{i=0\ldots\infty}\ \Sigma_{n=0\ldots\infty}\ x_i^{j} * y_n^{k} * p_{XY}(x_i,y_j)$$

- Y en el caso de v.a. continuas por:

$$E(X^j,Y^k) := \int_0^\infty \int_0^\infty x^j * y^k * f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

- Nota que para j=0 resultan las momentos por el origen de Y y para k=0 los momentos por el origen de X

- Para j=k=1 resulta para las v.a. discretas

$$E(X,Y) := \Sigma_{i=0\ldots\infty}\ \Sigma_{n=0\ldots\infty}\ x_i{*}y_n{*}p_{XY}(x_i,y_n)$$

- y para v.a. continuas

$$E(X,Y) := \int_0^\infty \int_0^\infty x{*}y{*}f_{XY}(x,y)dx\ dy$$

- denominado la **correlación entre X y Y**
- en el caso que E(X,Y) = 0 se denominan que **X es ortogonal a Y**

- Los **momentos centrales (j,k)** comunes de dos v.a. centrales X-E(X) y Y-E(Y) están dados por la expresión:

$$E\{[X-E(X)]^j * [Y-E(Y)]^k\}$$

- Para j=2 y k=0 resulta la V(X) y para j=0 y k=2 V(Y)
- Para j=k= 1 resulta la **covarianza** de X y Y con

$$COV(X,Y) = E\{[X-E(X)]*[Y-E(Y)]\}$$

- Donde resulta

$$COV(X,Y) = E[X*Y] - E(X)*E(Y)$$

- El valor de la covarianza depende de los valores de ambos v.a., para tener una medida relativa se usa una forma normalizada denominado el **coeficiente de correlación** de dos v.a. X y Y que se define como:

$$\sigma_{XY} := COV(X,Y)/(\sigma_X{}^*\sigma_Y)$$

- **Teorema:**

i. El coeficiente de correlación toma valores del intervalo [-1,+1]
ii. Las dos v.a. X, Y no tienen correlación si $\sigma_{XY} = 0$
iii. X, Y independiente => $\sigma_{XY} = 0$ (X,Y no tienen correlación pero el inverso no se cumple siempre)
iv. $\sigma_{XY} = 1 \Leftrightarrow Pr\{[X-(aY+b)]=0\} = 1$ (Y depende linealmente de X)

- La **desigualdad de Markov** permite estimar la probabilidad que una v.a. X toma una valor mayor que a usando el conocimiento del valor media

$$Pr\{X \geq \varepsilon\} \leq E(X)/\varepsilon$$

  - Nota en muchos casos la desigualdad de Markov proporciona una estimación ridícula
- Una mejor aproximación, auque en bastantes casos todavía no muy satisfactorio se consigue con la **desigualdad de Chebyshev** que se realiza base del valor media y la varianza

$$Pr\{ abs[X-E(X)] \geq \varepsilon\} \leq V(X)/ \varepsilon^2$$

- Para la ley de números largos sean:
  - $X_1 \ldots X_n$ unos v.a. con (iid) $f_{Xi}(x)= f_X(x)$ $i=1\ldots.n$
  - E(X) el valor medio y V(X) la varianza de la v.a. X
  - W_n una v.a que se forma con
  - $W_n =(1/n)*\Sigma_{i=1\ldots n} X_i$
- Resulta
  - $Pr\{abs[W_n-E(X)]\geq\varepsilon\} \leq V(X)/(n*\varepsilon^2)$ según la desigualdad de Chebyshev
  - pero con lay ley de números largos resulta
  - $\lim_{n\rightarrow\infty} Pr\{abs[W_n-E(X)]\geq\varepsilon\} =0$

Ley de números largos II

- Asumimos que hay n v.a. X (iid) con E(X) y $V(X)= \sigma_X^2$
- De estos n v.a. se forma una única v.a. con

$$Z_n = [\Sigma_{i=1\ldots n} X_i - n^*E(X)]/ (\sigma_X^*\sqrt{n})$$

- El **teorema central de límite** resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n \leq x\} = \Phi(X) \text{ con}$$

$$\Phi(x) = \int_0^x (1/\sqrt{2^*\pi}) * \exp(-y^2/2)\, dy$$

- Entonces el teorema central de limite resulta que la suma normalizado de n v.a. (iid) converge contra la **distribución de Gauss**
- De este teorema resulta la importancia de la distribución de Gauss porque sucesos aleatorio en el macrocosmo se componen en muchos casos de un largo número de idénticos sucesos en el microcosmo

- La transformada de v.a. permite unas operaciones adicionales:
  - Facilitar la operación de convolución transformándola a una multiplicación
  - Generar los momentos al menos la esperanza y la Varianza
  - Distinguimos entre transformaciones de v.a. discretas y continuas
- En el caso de v.a. discretas se aplica la transformada de Z y en el caso de v.a. se pueden aplicar dos transformadas la de Fourier o la de Laplace donde en el primer caso la transformada se denomina función característica de una v.a.

- Sea X una v.a. continua entonces la **función característica** esta definido como

$$\Phi_X(\omega) := E[e^{j\omega X}] = \int_0^\infty f_X(x) * e^{j\omega x} * dx$$

- Nota que $j = \sqrt{-1}$ (unidad imaginaria)
- La inversión resulta de la retransformación de Fourier con

$$f_X(x) = [1/(2*\pi)] * \int_0^\infty \Phi_X(\omega) * e^{-j\omega x} * d\omega$$

- El siguiente teorema permite calcular los momentos por el origen de una v.a. a base de la función característica y inversa de generar la función característica a base de sus momentos
- Teorema

$$\{d^k\Phi_X(\omega)/dk\}|_{\omega=0} = j^k * E(X^k)$$

$$\Phi_X(\omega) = \Sigma_{k=0..\infty}(j*\omega)^k/k! * E(X^k)$$

- Como consecuencia resulta la fdp desde los momentos por el origen

$$m_X{}^k = E(X^k)\ k= 1,2\ldots \Rightarrow \Phi_X(\omega)$$

- y con su retransformación $f_X(x)$
- Se puede deducir que más momentos se conocen mejor se aproxima la v.a. real
- En la practica se limita a los primeros dos momentos del origen

$$m_X{}^1 = E(X^1)\ ,\ m_X{}^2 = E(X^2)$$

- y se deduce la Varianza con

$$V(X) = m_X{}^2 – [m_{X1}]^2$$

- La función característica de una v.a. permite tratar unas operaciones especiales donde las más importantes son:
- **Transformación lineal** de una v.a
- De $Y = a^*X + b$ resulta:

$$\Phi_Y(\omega) = e^{jtb} * \Phi_X(a^*\omega)$$

- **Suma de n v.a.** X1 …. Xn estocásticamente independientes entre si
- de $X = \Sigma_{i=1\ldots n} X_i$ resulta:

$$\Phi_Y(\omega) = \Pi_{i=1\ldots n} \Phi_{Xi}(\omega)$$

- Suma de n v.a. $X_1 \ldots . X_n$ estocásticamente independiente y con mismo fdp $f_X(x)$ abreviado con (iid)
- De $Y = \Sigma_{i=1\ldots n} X_i$ y $X_i = X$ (iid) resulta:

$$E(Y) = n*E(X)$$

$$V(Y) = n*V(X)$$

$$\sigma_Y = [n*V(X)]^{0,5}$$

- Y para $n \rightarrow \infty$

$$f_Y(y) = 1/\sqrt{}(2*\pi) * e^{-(y-Y)**2/(2*\sigma Y**2)}$$

- En la teoría de cola se usa menos la función característica para la descripción de v.a.
- Como alternativa se usa frecuentemente la **transformación de Laplace**
- Sea X una v.a. continua y s un número del espacio de los números complejos.
- La transformación de Laplace se define como:

$$F_X(s) := E(e^{-s^*X}) = \int_o^\infty e^{-s^*x}\, f_X(x)dx$$

- Observe que para v.a. nos limitamos a valores $x \geq 0$

- Desde la $F_X(s)$ se puede similar como con la función característica deducir los momentos por el origen aplicando el siguiente teorema
- Teorema:

$$\delta^k F(s)/\delta s^k|_{s=0} = (-1)^k * E(X^k)$$

- A las v.a. se pueden aplicar todas las operaciones definido en la teoría de la transformada Laplace donde la más importante es que la **convolución** en el dominio original se transforma en una producto en el dominio Laplace

- Recuerda que la fdp de suma de dos v.a.

$$Y = X_1 + X_2 \text{ con fdp } f_{X1}(x_1) \text{ y } f_{X2}(x_2)$$

resulta para la fdp de Y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X1}(y-x_2)*f_{X2}(x_2)dx_2$$

- este integral describe la convolución abreviado como

$$f_Y(y)= f_{X1}(x1)\ (*)\ f_{X2}(x2)$$

- desde la teoría de la transformada de Laplace resulta

$$F_Y(s) = F_{X1}(s)*\ F_{X2}(s)$$

- La transformada de Fourier o de Laplace se limitan a v.a. continuas y entonces para el caso de v.a. X con valores discretos no se pueden aplicar.
- Se aplica una transformada correspondiente denominado **transformada de Z**
- Sea la fdp de una variable X

$$p_n := \Pr\{X=x_n\} \text{ con } n=0,1,2,\dots$$

- La transformada de Z se define por

$$G(z) := E(z^X) = \Sigma_{n=0\dots\infty}\, z^n * p_n$$

Transformada XI

- Con la transformada de la v.a. se puede deducir el primer y el segundo momento por el origen
- Nota que en contrario a la transformada de un v.a. continua no se pueden deducir momentos superiores
- Resulta:

$$G^{(1)(}z)|_{z=1} := dG(z)/dz|_{z=1} = E(X)$$

$$G^{(2)(}z)|_{z=1} := d^2G(z)/dz^2|_{z=1} = E(X^2) - E(X)$$

- Entonces resulta:

$$E(X) = G^{(1)}(z)|_{z=1}$$

$$V(X) = \{G^{(2)}(z) + G^{(1)(}z) - [G^{(1)(}z)]^2 \}|_{z=1}$$

Transformada XII

- Nota que similar como con la transformada de v.a. continua en el caso de la Transformada Z se aplican todas las operaciones definido en la teoría de la transformada Z
- la más importante es que la convolución en el dominio original que transforma en una producto en el dominio Z

Distribuciones de tiempo discreto I

- Las **fdp de tiempo discreto** se usan en las telecomunicaciones para modelar
  - Tráfico de llegadas (conexiones, paquetes, tramas)
  - Ocupación de dispositivos (cola, servidor, matriz de conmutación etc.)
- Los más importantes fdp que se aplican en las telecomunicaciones se basan en los siguientes tipos de v.a. discretos:
  - Bernoulli
  - Binominal (positivo)
  - Binominal negativo
  - Poisson
  - Uniforme
  - Geométrico

- La v.a. tipo **Bernoulli** corresponde a dos tipos de eventos o pruebas si o no que se expresan con los valores 1 y 0 resulta:

$$X \varepsilon \{0,1\} \text{ con}$$

$$p_1 := \Pr\{X= 1\} = p \text{ y}$$

$$p_0 := \Pr\{X=0\} = q = 1-p$$

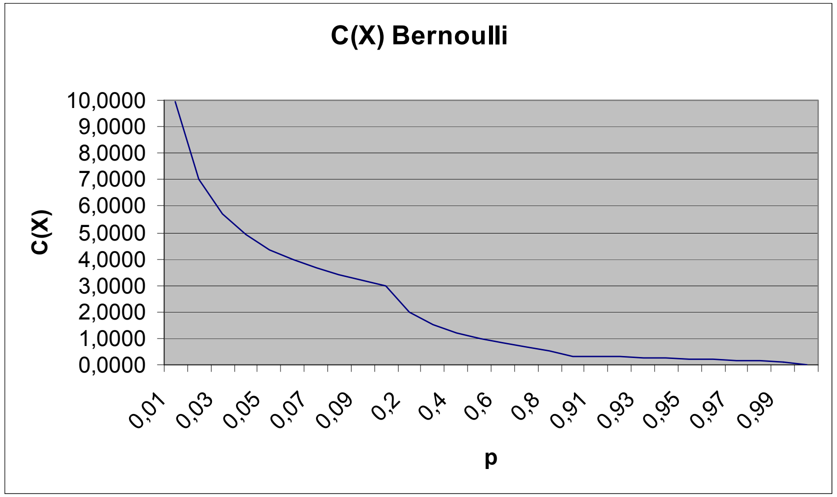
$$E(X) = p$$

$$V(X)= p^*(1-p)$$

$$C_X = \sqrt{}(1-p)/p$$

Ejemplo Bernoulli

p	E(X)	V (X)	C(X)
0,01	0,01	0,0099	9,9499
0,02	0,02	0,0196	7,0000
0,03	0,03	0,0291	5,6862
0,04	0,04	0,0384	4,8990
0,05	0,05	0,0475	4,3589
0,06	0,06	0,0564	3,9581
0,07	0,07	0,0651	3,6450
0,08	0,08	0,0736	3,3912
0,09	0,09	0,0819	3,1798
0,1	0,1	0,09	3,0000
0,2	0,2	0,16	2,0000
0,3	0,3	0,21	1,5275
0,4	0,4	0,24	1,2247
0,5	0,5	0,25	1,0000
0,6	0,6	0,24	0,8165
0,7	0,7	0,21	0,6547
0,8	0,8	0,16	0,5000
0,9	0,9	0,09	0,3333
0,91	0,91	0,0819	0,3145
0,92	0,92	0,0736	0,2949
0,93	0,93	0,0651	0,2744
0,94	0,94	0,0564	0,2526
0,95	0,95	0,0475	0,2294
0,96	0,96	0,0384	0,2041
0,97	0,97	0,0291	0,1759
0,98	0,98	0,0196	0,1429
0,99	0,99	0,0099	0,1005
1	1	0	0,0000



- En una fdp **Binominal** (positivo) la v.a. X se basa en un conjunto de n pruebas sobre una v. a. tipo Bernoulli y entonces la suma de n v.a. tipo Bernoulli (iid).
- Indica la probabilidad de que m pruebas resultan positivos (1) y entonces n-m negativas (0)

$$X \varepsilon \{0,1,\ldots n\} \text{ con}$$

$$p_m := p_m(n) := \Pr\{X=m\} \text{ con}$$

$$p_m := \mathrm{Bincof}(n;m) * p^m(1-p)^{n-m} \text{ con}$$

$$\mathrm{Bincof}(n;m) := n!/[m!*(n-m)!]$$

- Las probabilidades p_m de la fdp binominal se puede calcular con los siguientes formulas recursivos:

$$p_0 = (1-p)^n$$

$$P_{m+1} = [(n-m)/(m+1)] * [p/(1-p)] * p_m$$

- Para los momentos resulta:

$$E(X) := n*p$$

$$V(X) = n*p*(1-p)$$

$$C_X = \sqrt{[(1-p)/(n*p)]}$$

$$Id(X) = 1-p \leq 1$$

- En la fdp Binominal (positivo) se requiere que los resultados de los n pruebas sean independiente de los resultados anteriores,
- en la fdp **Binominal negativa** se asume que la probabilidad de un resultado positive crece con los resultados positivos anteriores,
- resulta

$$X \varepsilon \{0,1,\ldots n\} \text{ con}$$

$$p_m := p_m(n) := \Pr\{X=m\} \text{ con}$$

$$p_m := \mathrm{BinCof}(n+m-1;n-1) * p^m(1-p)^n$$

- La probabilidades p_m se puede calcular con los siguientes formulas recursivos:

$$P_0 = (1-p)^n$$

$$P_{m+1} = [p*(n+m)/(m+1)] * [p/(1-p)] * p_m$$

- Los momentos resultan:

$$E(X) = n*p/(1-p)$$

$$V(X) = n*p/(1-p)^2$$

$$C_X = \sqrt{}[(1/(n*p)]$$

$$Id(X)= 1/(1-p) \geq 1$$

- La fdp de **Poisson** resulta de la distribución Binominal (positiva) considerando que la v.a. discreta X puede tener infinitos valores ($n \rightarrow \infty$)
- en la practica consideramos que n sea grande.
- Además se requiere que el producto de n*p converge con n grande contra un valor finito
- Resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n*p = \text{const.} = \lambda$$

$$p_m = [\lambda^m/(m!)]*e\text{-}\lambda \text{ para } X \varepsilon \{0,1,\ldots\infty\}$$

- las probabilidades p_m se pueden otra vez calcular con formulas recursivas:

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$p_{m+1} = [\lambda/(m+1)]*p_m$$

- Los momentos resultan:

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$$C_X = \sqrt{(1/\lambda)}$$

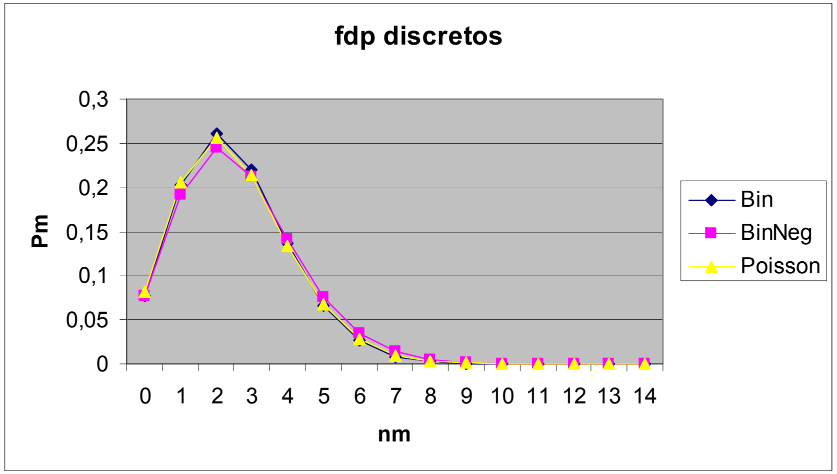
$$Id(X) = 1$$

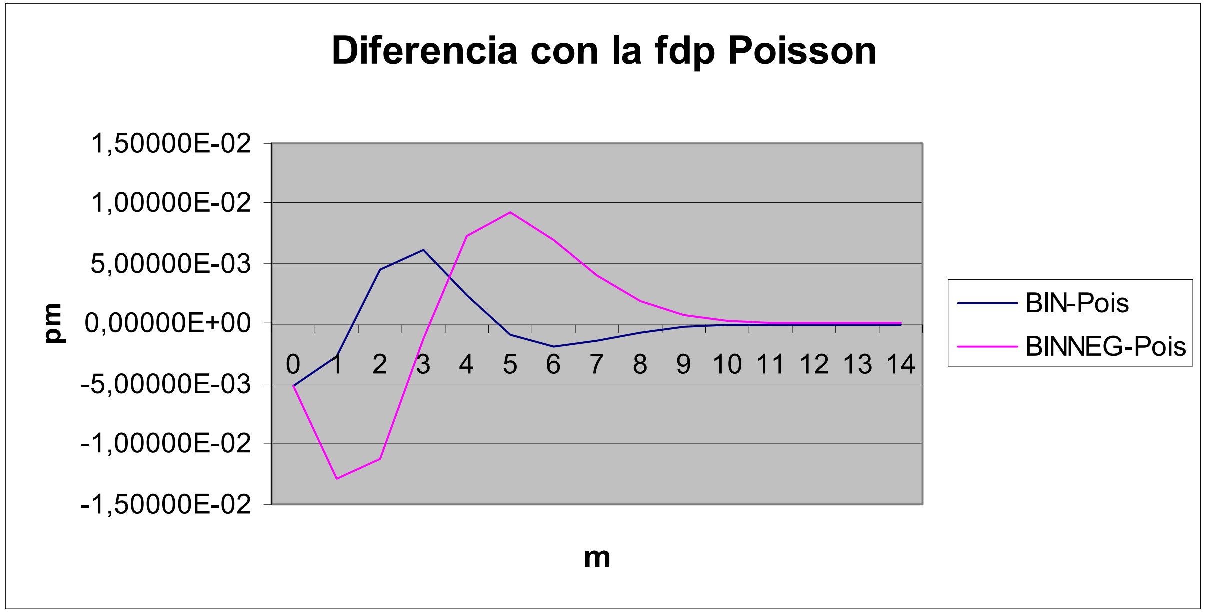
Distribuciones de tiempo discreto IX

m	fdp BIN	fdp BIN NEG	fdp Poisson	dif BIN	dif BENN
0	0,076944975	0,07694498	0,082084999	-5,14002E-03	-5,14002E-03
1	0,202486777	0,19236244	0,205212497	-2,72572E-03	-1,28501E-02
2	0,26110137	0,24526211	0,256515621	4,58575E-03	-1,12535E-02
3	0,219874838	0,21256049	0,213763017	6,11182E-03	-1,20252E-03
4	0,135975229	0,14082133	0,133601886	2,37334E-03	7,21944E-03
5	0,065840637	0,07604352	0,066800943	-9,60306E-04	9,24257E-03
6	0,025989725	0,03485328	0,027833726	-1,84400E-03	7,01955E-03
7	0,008598105	0,01394131	0,009940617	-1,34251E-03	4,00069E-03
8	0,002432359	0,00496659	0,003106443	-6,74084E-04	1,86015E-03
9	0,000597421	0,00160035	0,000862901	-2,65479E-04	7,37446E-04
10	0,000128917	0,0004721	0,000215725	-8,68079E-05	2,56377E-04
11	2,46732E-05	0,00012876	4,90285E-05	-2,43553E-05	7,97267E-05
12	4,22041E-06	3,2725E-05	1,02143E-05	-5,99385E-06	2,25110E-05
13	6,49294E-07	7,8037E-06	1,96428E-06	-1,31499E-06	5,83944E-06
14	9,03153E-08	1,7558E-06	3,50764E-07	-2,60449E-07	1,40507E-06

Comparación fdp Bin, Bin neg., Poisson para n = 50, p=0,25 => λ= 2,5

Distribuciones de tiempo discreto X



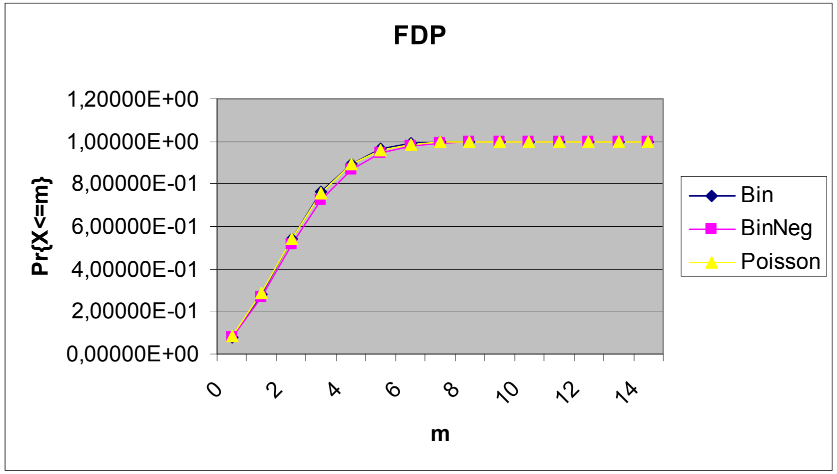


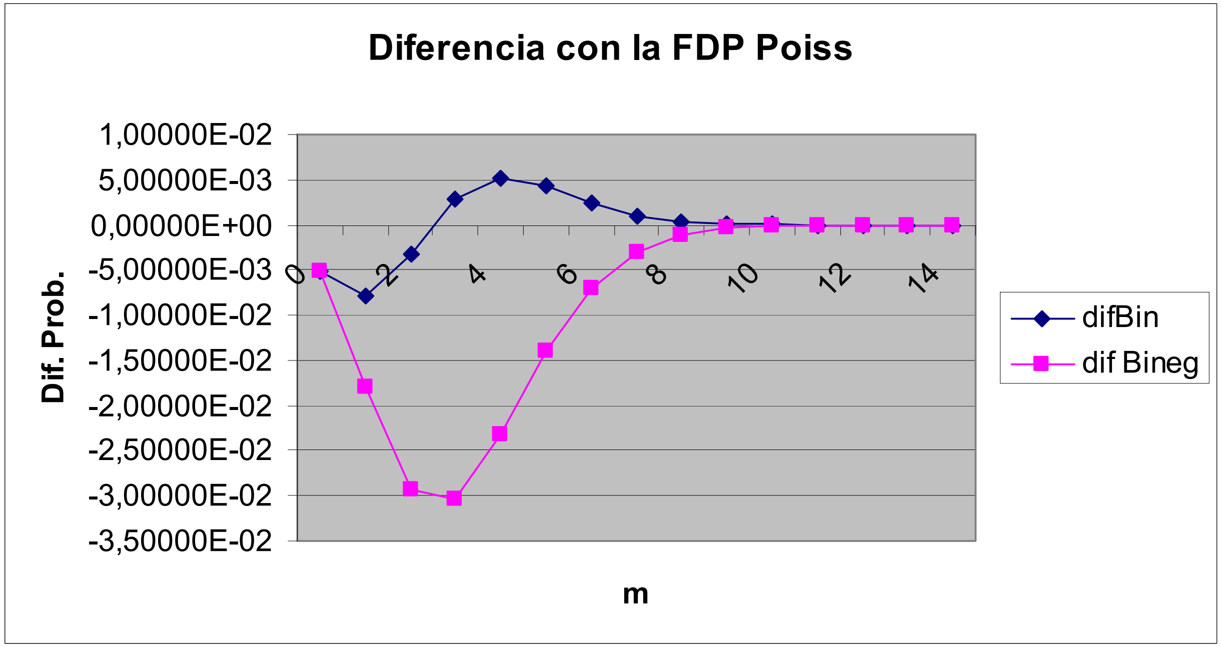
Distribuciones de tiempo discreto XI

m	FDP BIN	FDP BIN NEG	FDP Poisson	dif BIN	dif BENN
0	7,69450E-02	7,69450E-02	8,20850E-02	-5,14002E-03	-5,14002E-03
1	2,79432E-01	2,69307E-01	2,87297E-01	-7,86574E-03	-1,79901E-02
2	5,40533E-01	5,14570E-01	5,43813E-01	-3,27999E-03	-2,92436E-02
3	7,60408E-01	7,27130E-01	7,57576E-01	2,83183E-03	-3,04461E-02
4	8,96383E-01	8,67951E-01	8,91178E-01	5,20517E-03	-2,32267E-02
5	9,62224E-01	9,43995E-01	9,57979E-01	4,24487E-03	-1,39841E-02
6	9,88214E-01	9,78848E-01	9,85813E-01	2,40086E-03	-6,96455E-03
7	9,96812E-01	9,92789E-01	9,95753E-01	1,05835E-03	-2,96385E-03
8	9,99244E-01	9,97756E-01	9,98860E-01	3,84268E-04	-1,10370E-03
9	9,99841E-01	9,99356E-01	9,99723E-01	1,18789E-04	-3,66259E-04
10	9,99970E-01	9,99828E-01	9,99938E-01	3,19809E-05	-1,09882E-04
11	9,99995E-01	9,99957E-01	9,99987E-01	7,62557E-06	-3,01551E-05
12	9,99999E-01	9,99990E-01	9,99998E-01	1,63171E-06	-7,64413E-06
13	1,00000E+00	9,99998E-01	1,00000E+00	3,16728E-07	-1,80470E-06
14	1,00000E+00	1,00000E+00	1,00000E+00	5,62786E-08	-3,99624E-07

Comparación FDP Bin, Bin neg., Poisson para n = 50, p=0,25 => λ= 2,5

Distribuciones de tiempo discreto XII





- En una fdp **uniforme** el valor de p_m no depende del valor m pero solamente de los limites a y b y el número de valores naturales (b-a+1),
- asumimos que X ε {1,2… n} (a=1; b=n)
- Resulta:

$$p_m = 1/n$$

$$E(X) = (n+1)/2$$

$$V(X)=(n^2-1)/12$$

$$C_X= \sqrt{((n-1)/[3*(n+1)]}$$

$$Id(X) = (n-1)/6$$

Distribuciones de tiempo discreto XIV

- Para el caso general
- asumimos que X ε {a, a+1,…n+a} n≥0; a≥1
- Nota que V(X) no depende de a
- Resulta:

$$p_m = 1/(n+1)$$

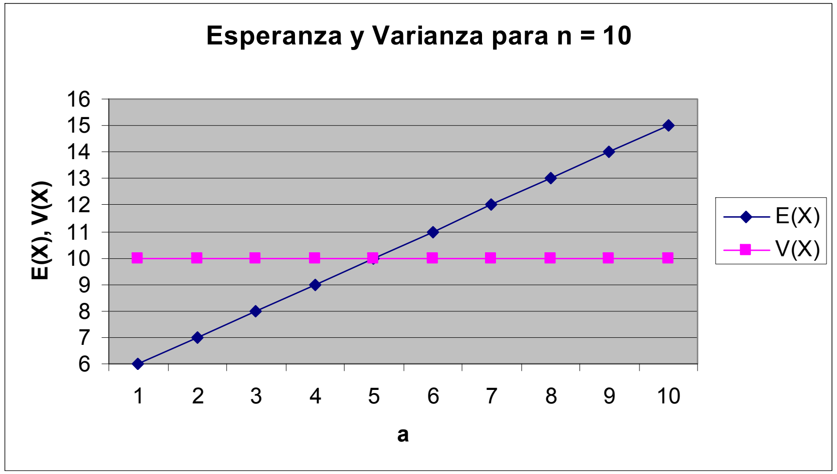
$$E(X) = n/2+a$$

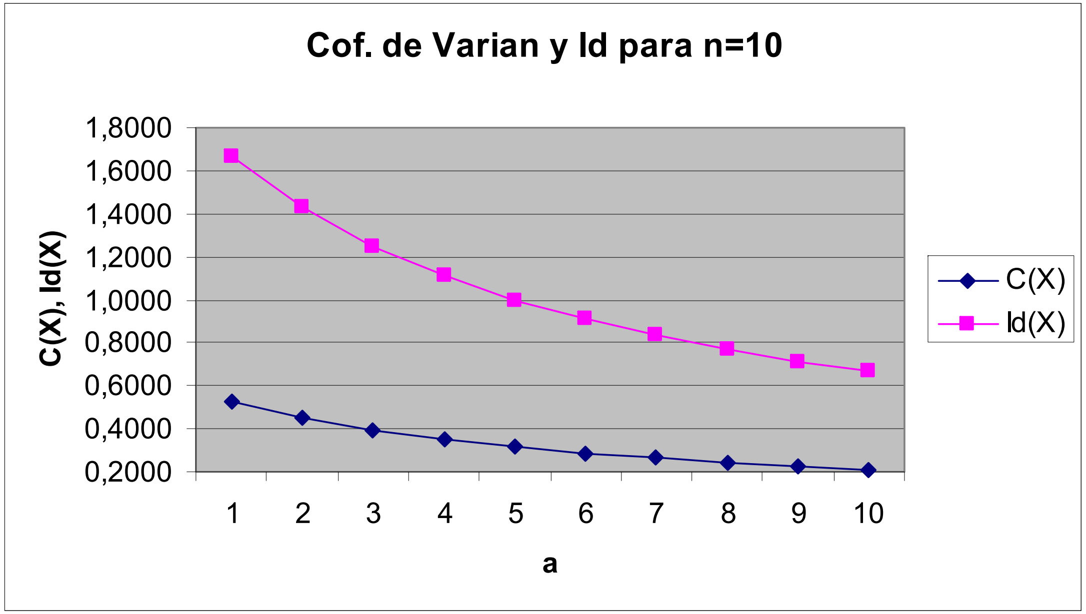
$$V(X)=\Sigma_{m=0\ldots n}(a+m)^2/(n+1)-(n/2+a)^2$$

Distribuciones de tiempo discreto XV

n	10									
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E(X)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V(X)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
C(X)	0,5270	0,4518	0,3953	0,3514	0,3162	0,2875	0,2635	0,2433	0,2259	0,2108
Id(X)	1,6667	1,4286	1,2500	1,1111	1,0000	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667

Distribuciones de tiempo discreto XVI





Distribuciones de tiempo discreto XVII

- La **fdp geométrico** toma valores desde 1 hasta n
- Se observe que la fdp geométrico es la única fdp discreto que no tiene memoria
- Ejemplos:
  - Numero de pasos temporales hasta que un primer paquete llegue con p probabilidad de la llegada de un paquete en un paso temporal
  - Numero de juegos hasta que se gana la primera vez donde p es la probabilidad de que se gana en un juego
  - Probabilidad de que lleguen m bloque de información (e.g. octeto) para encapsularlo en un paquete con longitud L con p probabilidad de un bloque

- Resulta par la fdp geometrica

$$p_m = p^*(1-p)^{m-1}$$

$$E(X) = 1/p$$

$$V(X) = (1-p)/p^2$$

$$C_X = \sqrt{1-p}$$

$$Id(X) = (1-p)/p$$

- Las **fdp con variable aleatorio continua** se aplican en el diseño, dimensionado y análisis de redes de comunicación sobre todo para modelar:
  - La duración de una petición (llamada, sesión, paquete etc.)
  - La duración de la inter-llegada entre dos peticiones
- Los más importantes fdp que se aplican en las telecomunicaciones se basan en los siguientes tipos de v.a. continuos:
  - Exponencial negativo
  - Weibull
  - Gauss
  - Uniforme

- La **fdp exponencial negativo** es la única fdp con variable continua que cumple la condición de estar sin memoria
- Es una fdp que se modela con un único parámetro aquí anotado con α
- Se usa para modelar
  - la v.a. de la duración de un servicio T_s en las cadenas de Markov y
  - la v.a. del tiempo de inter-llegada τ_{ia} para modelar el proceso de llegada en cadenas de Markov

- Su características son:

$$f_T(t) = \alpha * e^{-\alpha * t}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\alpha * t}$$

$$E(T) = 1/\alpha$$

$$V(T) = 1/\alpha^2$$

$$C_T = 1$$

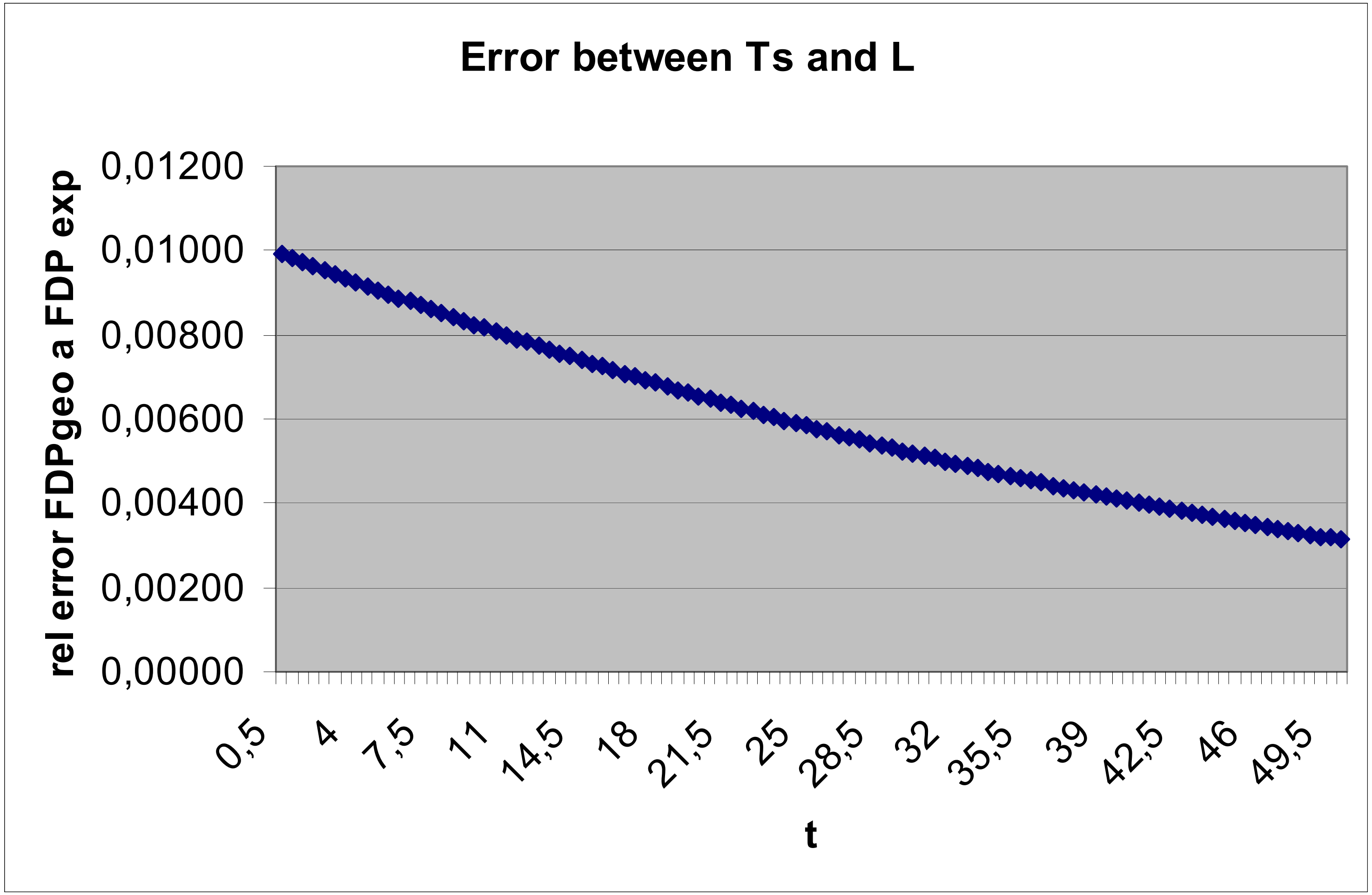
$$Id(T) = 1/\alpha$$

Distribuciones de tiempo continuo IV

		vel kbps	16
E(L)	50	E(Ts)	25
p	0,02	alfa	0,04
V(L)	2450	V(Ts)	625
C(L)	0,0028284 3	C(Ts)	1

Comparación FDP geometrica para L con su exp. negativa para Ts

m	t	Δ FDP exp.	FDP exp	FDP geo	error rel
0	0	0	0	0	
1	0,5	0,01980	0,01980	0,02000	0,00993
2	1	0,01941	0,03921	0,03960	0,00983
3	1,5	0,01902	0,05824	0,05881	0,00974
4	2	0,01865	0,07688	0,07763	0,00964
5	2,5	0,01828	0,09516	0,09608	0,00954
6	3	0,01792	0,11308	0,11416	0,00944
7	3,5	0,01756	0,13064	0,13187	0,00935
8	4	0,01721	0,14786	0,14924	0,00925
9	4,5	0,01687	0,16473	0,16625	0,00916
10	5	0,01654	0,18127	0,18293	0,00906


Error between Ts and L
rel error FDPgeo a FDP exp
0,01200
0,01000
0,00800
0,00600
0,00400
0,00200
0,00000
0,5
4
7,5
11
14,5
18
21,5
25
28,5
32
35,5
39
42,5
46
49,5
t

- Para el caso donde la terminación de un servicio depende de la duración ya recorrido se distinguen tres casos:
- La probabilidad de terminar una petición
    - crece con su duración ya recorrido (caída rápida)
    - decrece con su duración ya recorrido (caída lenta)
    - es independiente de su duración ya recorrido (fdp exp. negativo)
- La **fdp Weibull** permite modelar los tres casos y entonces incluye la fdp exp. negativo como caso singular
- Se compone de dos parámetros α y m (factor de forma)

- Sus características son:

$$f_T(t) = (m/\alpha)t^{m-1} * \exp -(t^m)/\alpha$$

$$F_T(t) = \exp -(t^m)/\alpha$$

$$E(T) = \alpha * \Gamma(1+1/m)$$

$$V(T) = \alpha^2 [\ \Gamma - \Gamma^2(1+1/m)]$$

- Resulta que:

$$m > 1 \Rightarrow \sigma(T) < E(T) \text{ y } C_T < 1$$

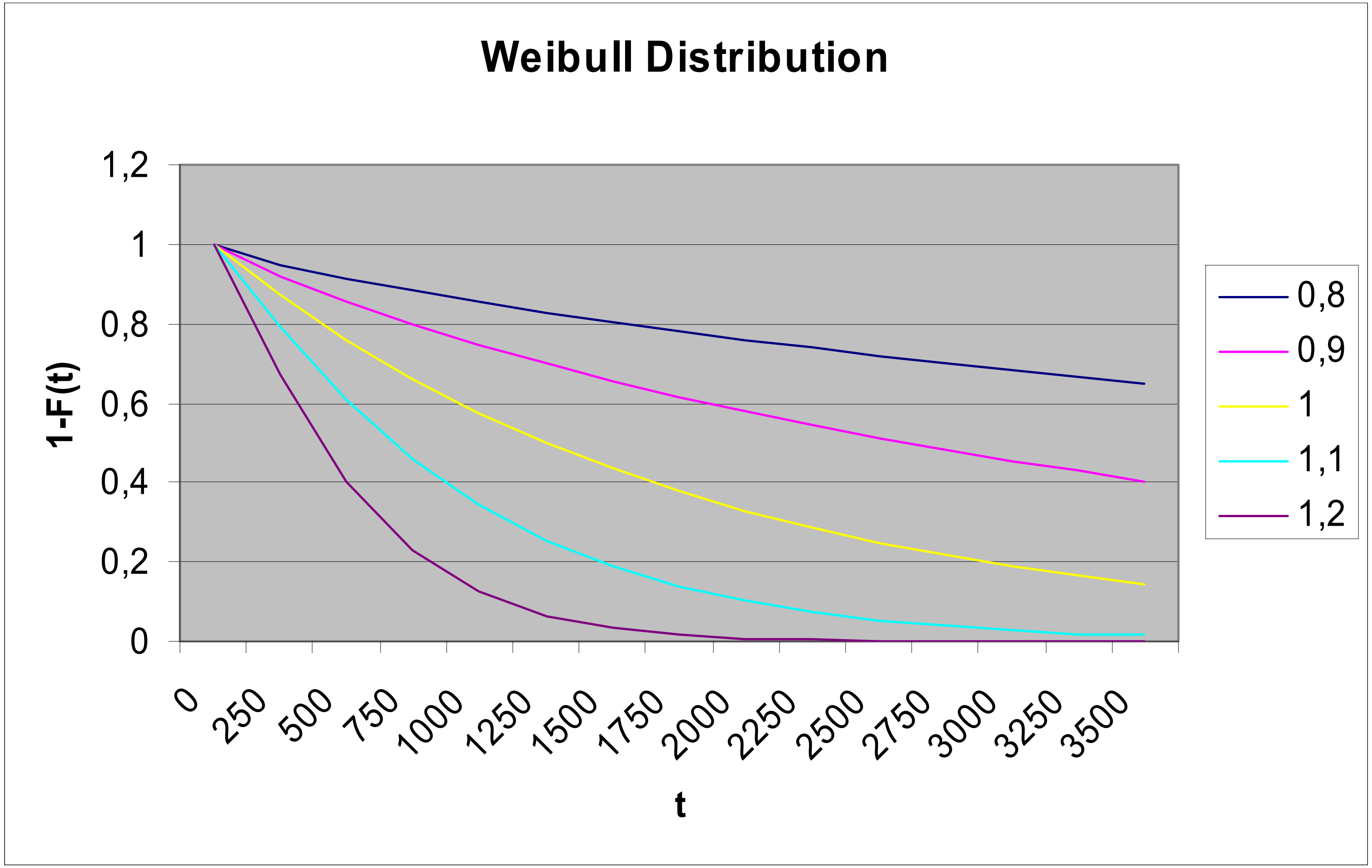
$$m = 1 \Rightarrow \sigma(T) = E(T) \text{ y } C_T = 1$$

$$m < 1 \Rightarrow \sigma(Ts) > ts \text{ y } C_T > 1$$

E(T)	**1800**	**1800**	**1800**	**1800**	**1800**
m	0,8	0,9	1	1,1	1,2
alfa	1588,69822	1710,72786	1800	1865,45414	1913,55849
V(Ts)	5148011,667	4013827,86	3240000	2684315,45	2269313,222
σ(T)	2268,92302	2003,45398	1800	1638,38806	1506,42398
C_T	1,26051	1,11303	1	0,91022	0,8369

Ejemplo de una fdp Weibull

Distribuciones de tiempo continuo IX



- La fdp Gaussian (Normal) se aplica por una v.a. continua Y resultando una larga suma M de v.a. X con cualquiera fdp

$$Y=X_1+X_2....X_M \text{ con } X_n = X \; n=1....M \text{ (iid)}$$

- Es el resultado de la ley de grandes números
- Es otra vez una fdp de dos parámetros con

$$\alpha = E(Y) = M*E(X)$$

$$\sigma^2 = V(Y) = M*V(X)$$

- Sus características son:

$$f_Y(y) = [1/(\sigma*\sqrt{(2*\pi)}]*\exp[-(y-\alpha)^2/(2*\sigma^2)]$$

Nota que la suma de i=1…n independiente v.a. con cada uno fdp Normal resulta otra vez una v.a. con fdp Normal y valor media como suma de α_i y Varianza como suma de σ_i^2

- La **fdp uniforme** se aplica cuando la duración de una petición oscila de forma igual entre un valor mínimo a y un valor máximo b con

$$b > a$$

- Se puede también aplicar para aproximar la fdp uniforme discreta en el caso de un gran numero de elementos n
- Su características son:

$$f_T(t) = 1/(b-a)$$

$$E(T) = (a+b)/2$$

$$V(T) = (a-b)^2/12$$