Redes de Comunicación

El proceso de nacimiento y muerte (PNM)

Instructor:

Dr.-Ing. K.D. HACKBARTH

Versión 20.08. 2012

- El PNM se modela con una cadena de Markov homogéneo y continuo en tiempo con las siguientes probabilidades de transición:

$$\Pr\{ X(t + \Delta t) = j / X(t)= i\} = \begin{cases} p_{ij} \text{ para } j = i-1, i, i+1 \\ p_{ij} = 0 \text{ otros casos} \end{cases}$$

- Para los elementos de la matriz generado infitisimal resulta bajo la condición de un PNM homogéneo:
- $\lambda_i := q_{i,i+1} = \lim \Delta_{t \to 0}\, p_{i,i+1}(\Delta t)/\Delta t$
- $\mu_i := q_{i,i-1} = \lim \Delta_{t \to 0}\, p_{i,i-1}(\Delta t)/\Delta t$
- con la condición
- $\Sigma_{\ j=1\ldots N}\ q_{ij} = 0$ resulta $q_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i)$

- Del PNM resultan dos casos especiales:
  - Proceso de nacimiento puro con $\lambda_i > 0$ y $\mu_i = 0$ para todos los estados i
  - Proceso de muerte puro con $\lambda_i = 0$ y $\mu_i > 0$ para todos los estados i
- En este capitulo se estudio los diferentes proceso de
  - nacimiento puro
  - muerto puro
  - nacimiento y muerto
- Como los procesos de nacimiento- y de muerte puro no tienen estado ergodico los vamos a estudiar en su dependencia temporal
- Los procesos de nacimiento y muerto se estudian sobre todo en su estado ergodico

El proceso de nacimiento puro I

- Este proceso esta definido por las siguientes probabilidades de transición

$$p_{i,i+1}(t,t+\Delta t) = Pr\{ X(t + \Delta t) = i+1 / X(t)= i\}$$

$$p_{i,i}(t,t+\Delta t) = Pr\{ X(t + \Delta t) = i / X(t)= i\}$$

- considerando que el proceso de nacimiento sea homogéneo resulta:

$$p_{i,i+1} = \lambda_i *\Delta t \text{ y } p_{i,i} = 1- \lambda_i *\Delta t$$

- los elementos de la matriz generador infitisimal resultan entonces:

$$q_{i,i+1} = \lambda_i \text{ y } q_{i,i} = - \lambda_i$$

- En los siguientes vamos a analizar los siguientes procesos de nacimiento puro:
  - Proceso de Poisson con

    $\lambda_i = \lambda =$ const para todos los estados i
  - Proceso de Yule con

    $\lambda_i = i*\lambda$ para todos los estados i
  - Proceso binominal (pos.) con

    $\lambda_i = (a-i)*\lambda$ y $a > i$ para todos los estados i
  - Proceso binominal negativo

    $\lambda_i = (b+i)*\lambda$ y $b > 0$ para todos los estados i
- **Nota: En el siguiente cambiamos la nomenclatura y usamos como índice del estado n =0…N**

- En esta parte deducimos:
  - el proceso de Poisson y su solución
  - el triangula inducido por proceso de Poisson que se forma por tres lemas que determina la equivalencia entre un proceso de Poisson X(t) y la variable aleatoria de inter-nacimiento τ_{ia} en forma de una fdp exponencial negativa
  - Como aplicación deducimos las ecuaciones del protocolo ALOHA
  - del proceso de Poisson un proceso que require k nacimiento cuya inter-nacimiento se forma por una distribución de Erlang-k

- El proceso de Poisson es un proceso de nacimiento puro con tasa de nacimiento constante e independiente del estado
- Con

  $\lambda_n = \lambda$ y la condición del estado inicial

  $X(t)/_{t=0} = 0$

- resulta:

  $dp_0(t)/dt = - \lambda^* p_0(t)$

  como **ecuación diferencial marginal** y

  $dp_n(t)/dt = \lambda^*[p_n\text{-}1(t) – p_n(t)]$

  como **ecuación diferencial general**

- este sistema de ecuaciones diferenciales se soluciona con un esquema de seis pasos usando las transformaciones de Z y Laplace
- resulta como solución :

$p_n(t) = [(\lambda^*t)^n/n!]^*\exp(-\lambda^*t)$ con

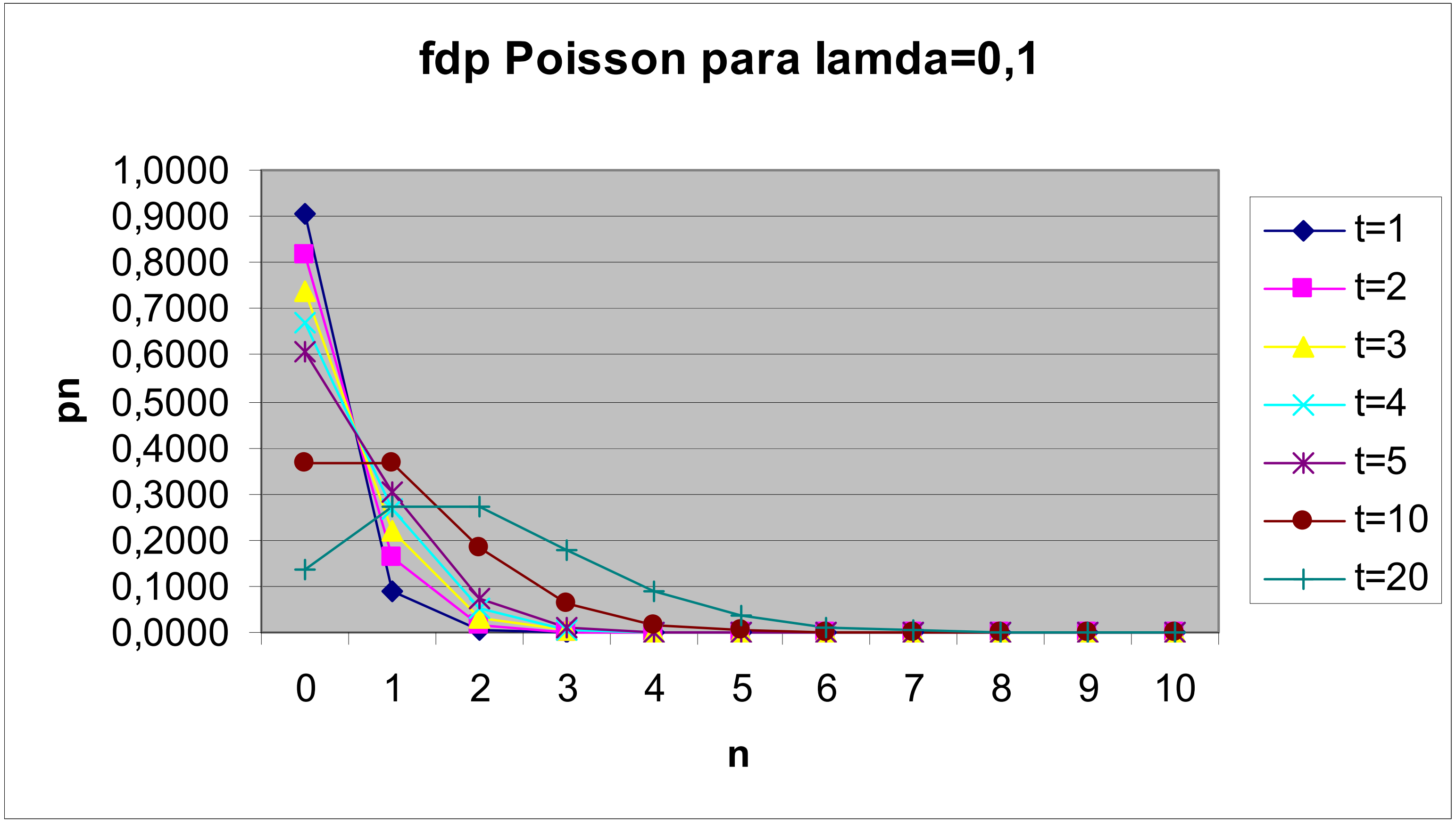
$E[X(t)] = \lambda^*t$; $V[X(t)] = \lambda^*t$ de que resulta

$I_d[X(t] = 1$ y $C[X(t)] = (\lambda^*t)^{-0.5}$

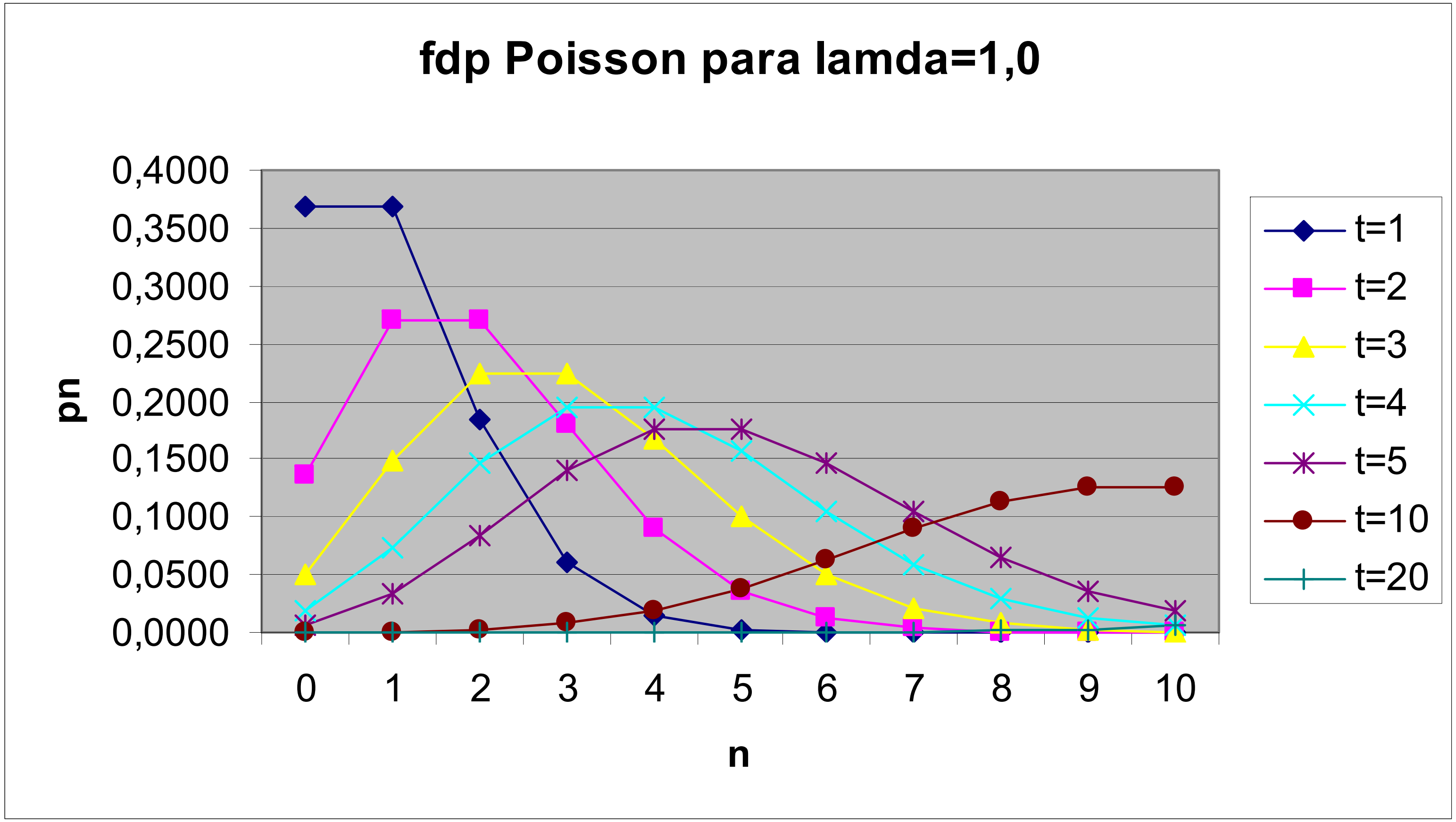
El proceso de Poisson III

- Interpretación:
  - $p_n(t)$ indica la probabilidad de exactamente n nacimientos en el intervalo [0,t] bajo la condición que en t=0 no había ningún nacimiento { X(0) = 0 }
  - $p_0(t)$ indica la probabilidad que en un intervalo [0,t] no ha ocurrido ningún nacimiento bajo la condición que en t=0 no había ningún nacimiento { X(0) = 0 }
  - E[X(t)] indica el valor medio del número de nacimientos en el intervalo [0,t] y se desarrollo como una función lineal con parámetro λ

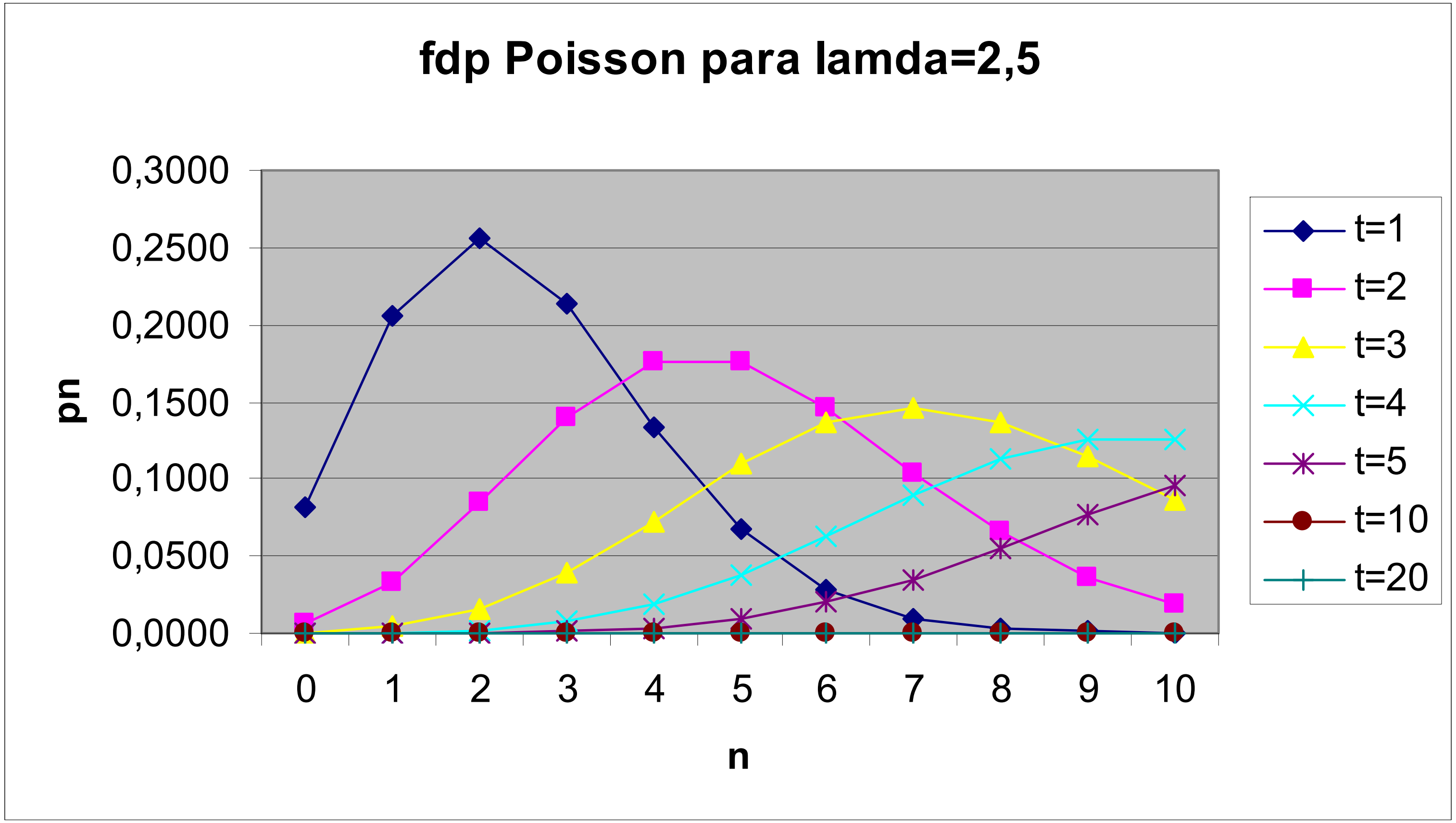
El proceso de Poisson IV



El proceso de Poisson V



El proceso de Poisson VI



Comparación del proceso de Poisson con la distribución de Poisson

- El proceso de Poisson indica el comportamiento de un proceso estocástico con estados discretos y variable temporal continuo
- se determinado por un único parámetro (λ) en dependencia de una función temporal
- La distribución de Poisson es una fdp discreta de una variable aleatorio X con un único parámetro (λ)

Proceso de Poisson	Distribución de Poisson
$p_n(t) = [(\lambda*t)^n/n!]*\exp(-\lambda*t)$	$p_n(\lambda) = [(\lambda)^n/n!]*\exp(-\lambda)$
$E[X(t)] = \lambda*t$	$E(X) = \lambda$
$V[X(t)] = \lambda*t$	$V[X] = \lambda$

Esquema general para la solución de procesos de nacimiento y muerto

- El esquema de deducir la solución general (con variable temporal) de un proceso de nacimiento o/y muerto se modela con seis pasos donde la base del proceso son la ecuación diferencial general y las ecuaciones diferenciales marginales
  i. Multiplicar la ecuación diferencial general con z^n
  ii. Sumar todas las ecuaciones que tienen la misma forma
  iii. Añadir al resultado del segundo paso los términos necesarios para que se pueda deducir una solución transformable en Z resultando una única ecuación diferencial en tiempo con variable espacial en Z
  iv. Eliminar los términos todavía no transformado usando las ecuaciones diferenciales marginales
  v. Solucionar la ecuación diferencial en t resultando del cuarto paso sea en forma directa o mediante la transformación Laplace resultando una ecuación en Z
  vi. Retransformar la ecuación en z resultando desde el quinto paso a una fdp discrete $p_n(t)$ con parámetro temporal t

- Hemos deducido el proceso de Poisson bajo los condiciones de

  $X(0)=0$ y infinitos estados $n= 0\ldots\infty$

- Una forma más general resulta un proceso de Poisson troncado con:

  $\lambda_n = \lambda$ y la condición del estado inicial

  $X(t_{)/t=0} = n_0$ y $n= n_0 \ldots N$

- resulta:

  $p_n(t) = [(\lambda^*t)^{n-n0}/(n-n_0)!]^*\exp(-\lambda^*t)$

  para $n0 \leq n < N$

  $P_N(t) = 1 - \exp(-\lambda^*t)^* \Sigma_{m = 0\ldots N-n0-1} [(\lambda^*t)m/m!]$

FDP y fdp de tiempo de inter-nacimiento

- Sea τ_n una variable aleatoria que describe el tiempo entre el n-te y el (n+1)-te nacimiento
- Como en el proceso de Poisson el parámetro que determino el nacimiento es independiente estado del proceso ($\lambda_n = \lambda$) resulta

$$\tau_n=\tau \text{ para todos los } n= 0\ldots.N$$

- como consecuencia la fdp es también independiente y idéntico distribuido resultando $f_\tau(t)$ (iid) como fdp exponencial negativa con parámetro λ

$$f_\tau(t) = \lambda*\exp(-\lambda*t) \text{ y } F_\tau(t) = 1- \exp(-\lambda*t)$$

- Nota: Se recuerda que la fdp exponencial negativa no tiene memoria y entonces la probabilidad de un nuevo nacimiento no depende del tiempo desde el última nacimiento sino solamente del parámetro λ

Teorema de equivalencia entre el proceso de Poisson y la variable aleatoria de inter-nacimiento I

- Hemos visto que un proceso de nacimiento constante con $\lambda_n = \lambda$ y estado inicial X(0)=0 resulta un proceso de Poisson de lo cual formulamos
  - **Lema 1:** Un proceso de nacimiento puro X(t) con $\lambda_n=\lambda$ y X(0)=0 tiene una distribución de Poisson con la fdp discreta $p_n(t) = [(\lambda*t)^n/n!]*\exp(-\lambda*t)$
- Además hemos deducido que la variable aleatorio de inter-nacimiento en un proceso de Poisson tiene una fdp exponencial negativa con parámetro λ de lo cual formulamos
  - **Lema 2:** En un proceso de Poisson la variable aleatorio del tiempo de inter-nacimiento τ esta distribuido (iid) con una fdp exponencial negativa $f_\tau(t) = \lambda*\exp(-\lambda*t)$

Teorema de equivalencia entre el proceso de Poisson y la variable aleatoria de inter-nacimiento II

- Finalmente se puede demostrar que desde un proceso de nacimiento puro con una variable de inter-nacimiento distribuido (iid) y exponencial negativo con parámetro λ resulta un proceso de nacimiento puro X(t) con parámetro de nacimiento λ lo cual se formula en el siguiente lema
  - **Lema 3:** Sea X(t) un proceso de nacimiento puro con tiempo de intern-nacimiento τ y distribuido con $f_\tau(t) = \lambda^* \exp(-\lambda^* t)$ entonces X(t) es un proceso de nacimiento con único parámetro $\lambda_n = \lambda$ para todos los $n = 0 \ldots \infty$

- **Teorema de equivalencia en un proceso de nacimiento Poisson**
  - Sea X(t) un proceso de nacimiento con variable aleatoria de inter-nacimiento τ
  - de los tres Lemas se deduce:

    $\lambda_n = \lambda$ => X(t) proceso de Poisson =>

    $f_\tau(t) = \lambda*\exp(-\lambda*t)$ => $\lambda_n = \lambda$

    y entonces resulta la siguiente equivalencia

    $\lambda_n = \lambda$ <=> X(t) proceso de Poisson <=>

    $f_\tau(t) = \lambda*\exp(-\lambda*t)$

- Nota:
  - En la practica queremos estimar según medidas correspondientes si un proceso de llegadas de peticiones (e.g. llamadas a un conmutador, paquetes IP a un enrutador) se puede aproximar con una distribución de Poisson
  - Basta de medir el tiempo de Inter-llegada de una serie suficiente grande de peticiones y calcular el la esperanza $E(\tau)$ y la varianza $V(\tau)$ de los intervalos temporales entre dos llegadas.
  - Si se cumple $V(\tau) \approx [E(\tau)]^2$ la v.a. de la inter-llegada se puede aproximar con una fdp exponencial negativa y el proceso de llegada con una fdp Poisson

Aplicación del proceso de Poisson para la ecuación de ALOHAnet I

- ALOHAnet (o simplemente ALOHA) fue un sistema de redes de ordenadores pionero desarrollado en la Universidad de Hawai. Fue desplegado por primera vez en 1970, y aunque la propia red ya no se usa, uno de los conceptos esenciales de esta red es la base para la cuasi-universal Ethernet. Por más detalles véase e.g. en http://es.wikipedia.org/wiki/ALOHAnet
- Sea
  - A_0 el trafico ofrecido por primera vez a la capa de enlace y
  - A el trafico ofrecido plus el trafico retransmitido por colisiones
  - Si se asume que las llegadas en que forman el trafico A_0 como A se distribuyen con una fdp de Poisson entonces resulta:

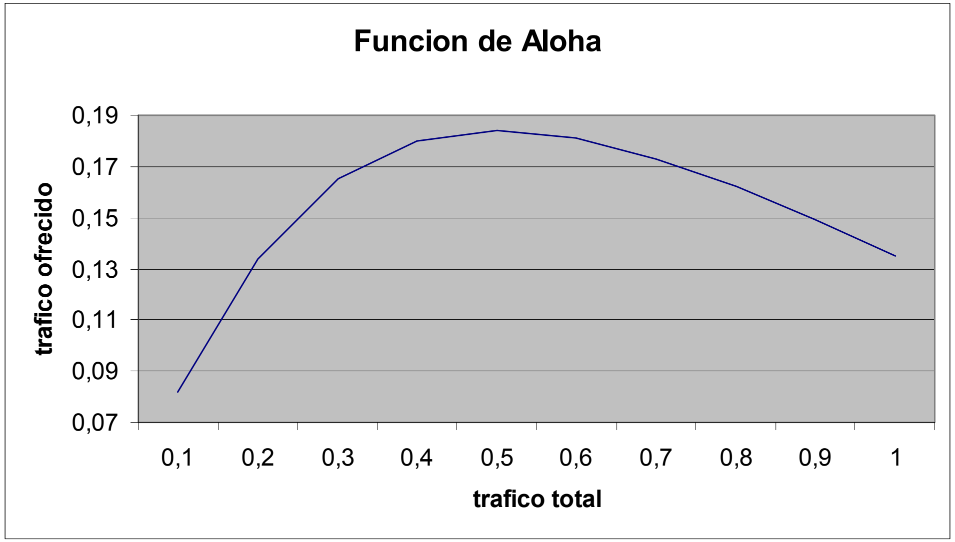
A_0 = A*exp(-2*A) (ecuación de Aloha)

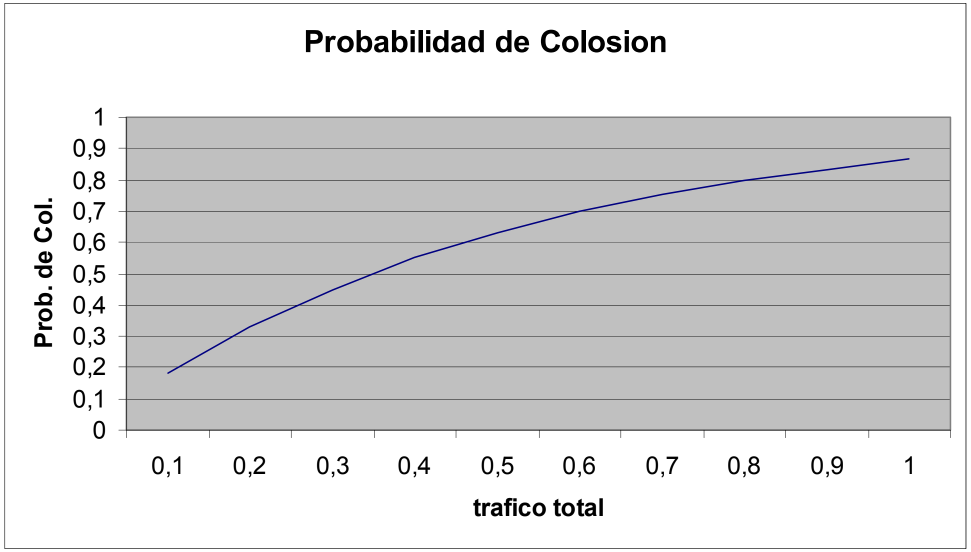
Pr{ no hay colisiones} = A0/A

Aplicación del proceso de Poisson para la ecuación de ALOHAnet II

- Entonces el trafico máximo que se puede ofrecer al enlace con ALOHA es
  - **A_0^{max}= 0,5*exp(-1) ≈ 0,184**
- Una mejora resulta con el ALOHA ranurado que requiere una sincronización en ambos lados, resulta como trafico máximo que se puede ofrecer
  - **A_0^{max}= exp(-1) ≈ 0,36**

Aplicación del proceso de Poisson para la ecuación de ALOHAnet III





Aspecto puntero de un proceso de Poisson I

- Sea X(t) un proceso de nacimiento con variable temporal continuo.
- El proceso X(t) se describe completamente por los puntos temporales t_i con i =0,….k en que ocurre un nacimiento
- Asumimos que X(0) = 0 resulta
  - $\Pr\{X(t) \leq k\} = \Pr\{ t \leq t_k\}$ y
  - los puntos t_i i=1…k describen un proceso puntero (ingl. point process)

Aspecto puntero de un proceso de Poisson II

- En el caso que $\tau_i = t_i - t_{i-1} = \tau$ y $f_\tau(t) = \lambda^* \exp(-\lambda^* t)$ resulta un proceso de Poisson y para la fdp de t_k

$$Pr\{t = t_k\} = f_{tk}(t) = [\lambda^*(\lambda^* t)^{k-1}/(k-1)!]^* \exp(-\lambda t)$$

que describe una fdp **Erlang-k**

- Nota:
- El proceso puntero de un proceso de llegada Poisson se puede aplicar para el cálculo del valor medio y la varianza del tiempo hasta que lleguen k peticiones.
- Se aplica en el caso en que se agregan varias unidades de protocolo de aplicación (A-PDU)) para formar una IP-PDU en común

Proceso de nacimiento Erlang I

- Sea X(t) un proceso de nacimiento Poisson con tasa λ y entonces con una fdp de inter-nacimiento exponencial negativa.
- Desde este proceso se forma un proceso Y(t) cuyo nacimiento ζ requiere k nacimientos del proceso original
- Para la fdp de inter-nacimiento de Y(t) resulta:

$$f_{\theta}(\zeta,k) = \lambda*[(\lambda*t)^{k-1}/(k-1)!]*\exp(-\lambda*t)$$

y con

$$\zeta = \lambda/k$$

resulta

$$f_{\theta}(\zeta,k) = \zeta*k[(k*\zeta*t)^{k-1}/(k-1)!]*\exp(-k*\zeta*t)$$

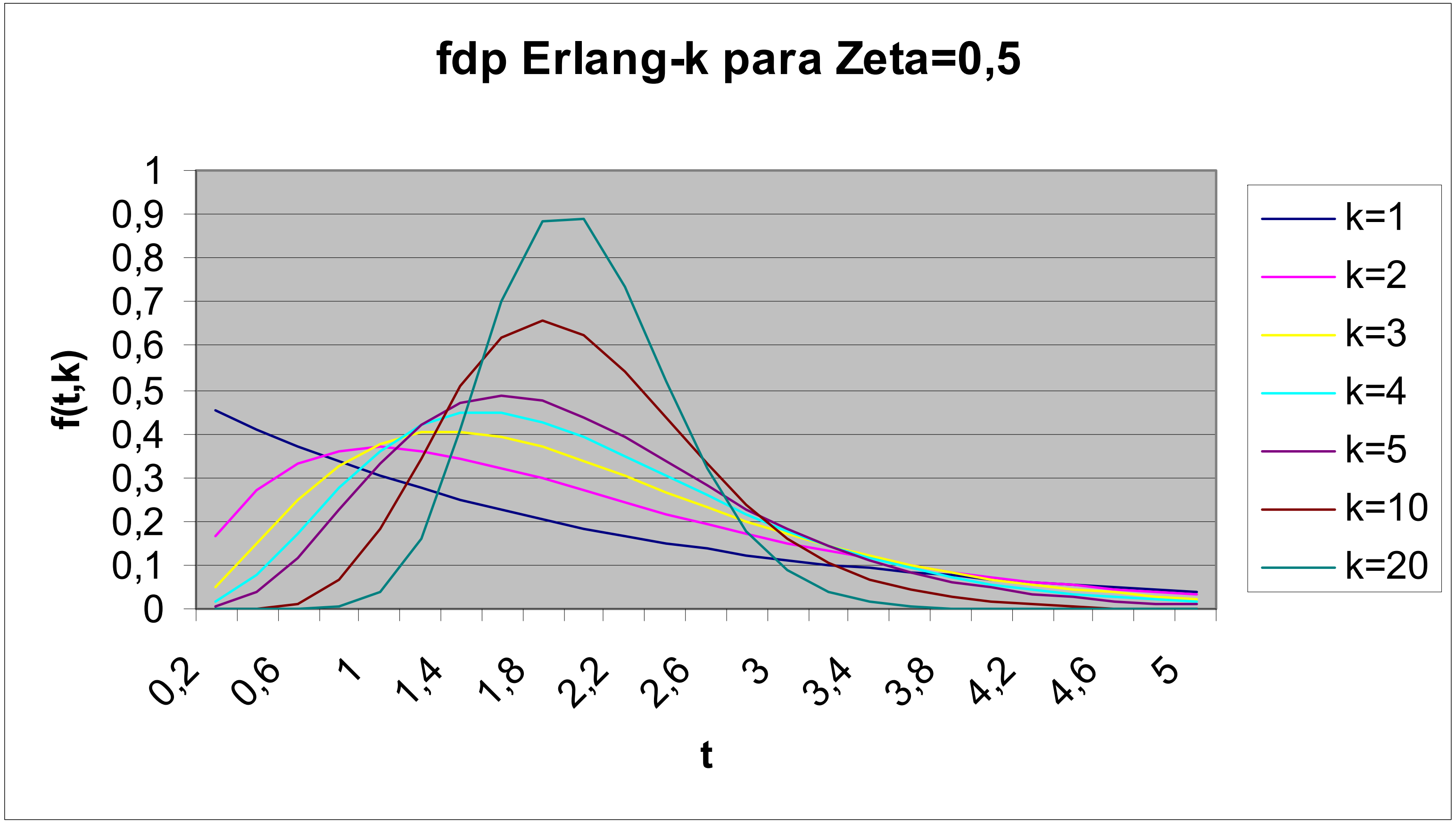
- para los primeros momentos estadísticos de la v.a. de inter-nacimiento resulta

$$E(\theta) = 1/\zeta;\ V(\theta) = 1/(k*\zeta^2)\ ;\ C(\theta) = 1/k^{0,5}$$

Proceso de nacimiento Erlang II

- Nota:
  - El proceso de nacimiento Erlang es un proceso semi-macroviano
  - se puede modelar con una cadena de Markov extendido perdiendo la condición del proceso de nacimiento puro (véase capitulo sistemas de cola semi-macronviano)
- Aplicaciones: El proceso de nacimiento Erlang se aplica para
  - Modelar un proceso de llegadas de IP-PDU basado en un proceso de llegada Poisson al nivel de A-PDU agregando k A-PDU a una IP-PDU
  - Modelar un proceso de llegada con una fdp de inter-llegada con caída más rápida que la fdp de inter-llegada exponencial negativo
  - En forma similar se puede modelar un proceso de llegada con fdp de inter-llegada hyper-exponencial con caída más lenta que la fdp de inter-llegada, se estudia en el capitulo sistemas de cola semi-macronviano

Proceso de nacimiento Erlang III



- El proceso de Yule es un proceso de nacimiento lineal con

  $\lambda = n^*\lambda$ y $n > 0$

- entonces el proceso debe ser ya activo en el tiempo inicial t=0

  $X(t)/_{t=0} = no > 0$

- Para **$n_0 = 1$** resulta como solución con el esquema de seis pasos visto en el proceso de nacimiento Poisson

  $p_n(t) = [\exp(-\lambda^*t)]^*[1-\exp(-\lambda^*t)]^{n-1}$

  con $a(t) = \exp(-\lambda^*t)$ resulta

  $p_n(t) = a(t)^*[1-a(t)]^{n-1}$

- que es para una t fija la distribución geométrica resultando por los primeros momentos estadísticos

  $E[X(t)] = \exp(\lambda^*t)$ $V[X(t)] =[\exp(\lambda^*t)]^*[\exp(\lambda^*t)-1]$

Proceso de nacimiento Yule II

- Para el caso más general n0 ≥ 1 y y para los dos primeros momentos estadísticos resultan las siguientes expresiones

$$p_n(t) = \binom{n-1}{n-n_0} * [\exp(-n_0 * \lambda * t)] * [(1-\exp(-\lambda * t)]^{n-n0}$$

$$E[X(t)] = n_0 * \exp(\lambda * t)$$

$$V[X(t)] = [n_0 * \exp(\lambda * t)] * [\exp(\lambda * t) - 1]$$

- Aplicaciones:
  - En la práctica el tráfico de llegadas desde sistemas de "Party Line", sistemas de marketing televisado o a la llegada de un avión desde los teléfonos móviles se puede modelar con un proceso de nacimiento de Yule

Proceso de nacimiento Bernoulli I

- El proceso de nacimiento Bernoulli considera que la tasa de llegada disminuye con el número de llegadas anteriores resultando

$$\lambda_n = (a-n)^* \lambda \quad \text{con } a > n$$

- el proceso se puede encontrase en el tiempo inicial t=0 en cualquier estado

$$n0 \geq 0$$

- resulta como solución general

$$p_n(t) = \binom{a-n_0}{n-n_0} * [\exp(-(a-n) * \lambda * t)] * [1 - \exp(-\lambda * t)]^{n-n0}$$

Para una t fija resulta una distribución binominal (positivo) de que se deducen los dos primeros momentos estadísticos como:

$$E[X(t)] = (a-n0)^*[1-\exp(-\lambda^* t)]$$

$$V[X(t)] = (a-n0)^*[1-\exp(-\lambda^* t)]^*\exp(-\lambda^* t)$$

Proceso de nacimiento Bernoulli II

- para $X(t)/_{t=0}$ =0 resulta desde la solución general

$$p_n(t) = \binom{a}{n} * [\exp(-(a-n) * \lambda * t)] * [1 - \exp(-\lambda * t)]^n$$

$$E[X(t)] = a*[1-\exp(-\lambda*t)]$$
$$V[X(t)] = a*[1-\exp(-\lambda*t)]*\exp(-\lambda*t)$$

Aplicaciones

Proceso de llegada desde un número limitado de teléfonos a un concentrador rural o desde los teléfonos móviles en una pico-célula

Proceso de Pascal (binominal negativo)

- El proceso binominal negativo es una generalización del proceso de Yule con

$$\lambda_n = (n+b)^* \lambda \quad \text{con } b \geq 0$$

- resulta

$$p_n(t) = \binom{n+b-1}{n} * \exp(-b*\lambda*t) * [1-\exp(-\lambda*t)]^n$$

E[X(t)] = b*[1-exp(-λ*t)]*exp(λ*t)

V[X(t)] =[b*(1-exp(-λ*t)]*exp(2λ*t)

El proceso de muerte puro I

- Este proceso esta definido por las siguientes probabilidades de transición

$$p_{i,i-1}(t,t+\Delta t) = Pr\{ X(t + \Delta t) = i-1 / X(t)= i\}$$

$$p_{i,i}(t,t+\Delta t) = Pr\{ X(t + \Delta t) = i / X(t)= i\}$$

- considerando que el proceso de nacimiento sea homogéneo resulta:

$$p_{i,i-1} = \mu_i * \Delta t \text{ y } p_{i,i} = 1- \mu_i * \Delta t$$

- los elementos de la matriz generador infitisimal resultan entonces:

$$q_{i,i-1} = \mu_i \text{ y } q_{i,i} = - \mu i$$

El proceso de muerte puro II

- Este proceso es la inversión del proceso de nacimiento puro desde un estando final N y resulta formulas similares como en el proceso de nacimiento puro
- Durante su evolución temporal converge al estado cero que corresponde que ninguna petición se encuentra más en sistema
- Su importancia reside sobre todo como parte del proceso de nacimiento y muerte
- Como proceso puro en su dependencia temporal se estudia en el caso de vaciar un sistema de peticiones para realizar acciones de OAM (Operación, Mantenimiento, Administración)
- Vamos a analizar los dos procesos de muerte puro más importante:
  - Proceso de muerte tipo Poisson con
    - $\mu_i = \mu$ = const para todos los estados i
  - Proceso de muerte tipo Yule (lineal) con
    - $\mu_i = i*\mu$ para todos los estados i

- Se inicia en un estado N y describe su desarrollo temporal hasta el estado cero, resulta:
- Con $\mu_n = \mu$ y la condición del estado inicial $X(t)/_{t=0}=N$ resulta:

$$dp_0(t)/dt = -\mu * p_1(t)$$

como **primera ecuación diferencial marginal**

$$dp_n(t)/dt = \mu * [-p_n(t) + p_{n+1}(t)]$$

como **ecuación diferencial general**

$$dp_N(t)/dt = -\mu * p_N(t)$$

como **segunda ecuación diferencial marginal**

El proceso de muerte tipo Poisson II

- este sistema de ecuaciones diferenciales se soluciona con un esquema de seis pasos usando las transformaciones de Z y Laplace
- resulta como solución :

$$p_n(t) = [(\mu^*t)^{N-n}/(N-n)!]^*\exp(-\mu^*t) \text{ para } n=1\ldots N$$

$$p_0(t)= 1- \Sigma_{n=1\ldots N}\, p_n(t)$$

El proceso de muerte tipo Poisson III

- Interpretación:
  - $p_n(t)$ indica la probabilidad de exactamente N-n muertes en el intervalo [0,t] bajo la condición que en t=0 el proceso se inicia en un estando N> 0 resultando

    $$X(0) = N$$
  - $p_0(t)$ indica la probabilidad que en un intervalo [0,t] han ocurrido N muertes bajo la condición $X(0) = N$
  - $p_N(t)$ indica la probabilidad que en un intervalo [0,t] no ha ocurrido ningún muerte
  - como la expresión $\exp(-\mu*t)$ converge con $t \rightarrow \infty$ contre cero y entonces $P_0(t)$ converge con $t \rightarrow \infty$ contre UNO resulta que desde el punto de vista practico el sistema se vacía ha partir de un tiempo suficiente largo

- Relación con el proceso de nacimiento tipo Poisson
  - En vede de enumerar el estado del proceso desde n=0…N se puede considerar un proceso de muerte Y(t) que cuenta el numero de muerto, resulta:

    $m= N-n$ con $m=0…N$ $Y(t)/_{t=0} = 0$

    $p_m(t)= [(\mu*t)^m/m!]*\exp(-\mu*t)$

    $p_N(t) = 1- \Sigma_{m=0…N-1} [(\mu*t)^m/m!]*\exp(-\mu*t)$
  - que es equivalente al proceso de nacimiento troncado tipo Poissano

Proceso de muerte lineal I

- Similar como el proceso de muerte puro tipo Poisson se inicia en un estado N y describe su desarrollo temporal hasta el estado cero
- Pero en contrario al proceso de muerte tipo Poisson se considera que cada de las peticiones se encuentran en un propio servidor entonces el sistema se compone de N servidores
- Con

  $\mu_n = n*\mu$ y la condición del estado inicial $X(t)/_{t=0} = N$
- resulta:

  $dp_0(t)/dt = -\mu*p_1(t)$

  como **primera ecuación diferencial marginal**

  $dp_n(t)/dt = -n*\mu*p_n(t) + (n+1)*p_{n+1}(t)]$

  como **ecuación diferencial general**

  $dp_N(t)/dt = -N*\mu*p_N(t)$

  como **segunda ecuación diferencial marginal**

- este sistema de ecuaciones diferenciales se soluciona con un esquema de seis pasos usando las transformaciones de Z y Laplace
- resulta como solución :

$$p_n(t) = \binom{N}{n} * \exp(-n * \mu * t) * [1 - \exp(-\mu * t)]^{N-n}$$

Para n = 1….N

$p_0(t) = 1 - \Sigma_{n=1\ldots N}\, p_n(t)$

- Interpretación:
  - $p_n(t)$ indica igual como el proceso la probabilidad de exactamente N-n muertes en el intervalo [0,t] bajo la condición que en t=0 el proceso se inicia en un estando N> 0 resultando $X(0) = N$
  - $p_0(t)$ indica la probabilidad que en un intervalo [0,t] han ocurrido N muertes bajo la condición $X(0) = N$
  - $p_N(t)$ indica la probabilidad que en un intervalo [0,t] no ha ocurrido ningún muerte
  - como la expresión $\exp(-n*\mu*t)$ converge con $t \rightarrow \infty$ contre cero y entonces $P_0(t)$ converge con $t \rightarrow \infty$ contre UNO resulta que desde el punto de vista practico el sistema se vacía ha partir de un tiempo suficiente largo

- Relación con el proceso de nacimiento lineal
  - En vede de enumerar el estado del proceso desde n=0…N se puede considerar un proceso de muerte Y(t) que cuento el numero de muerto resulta:

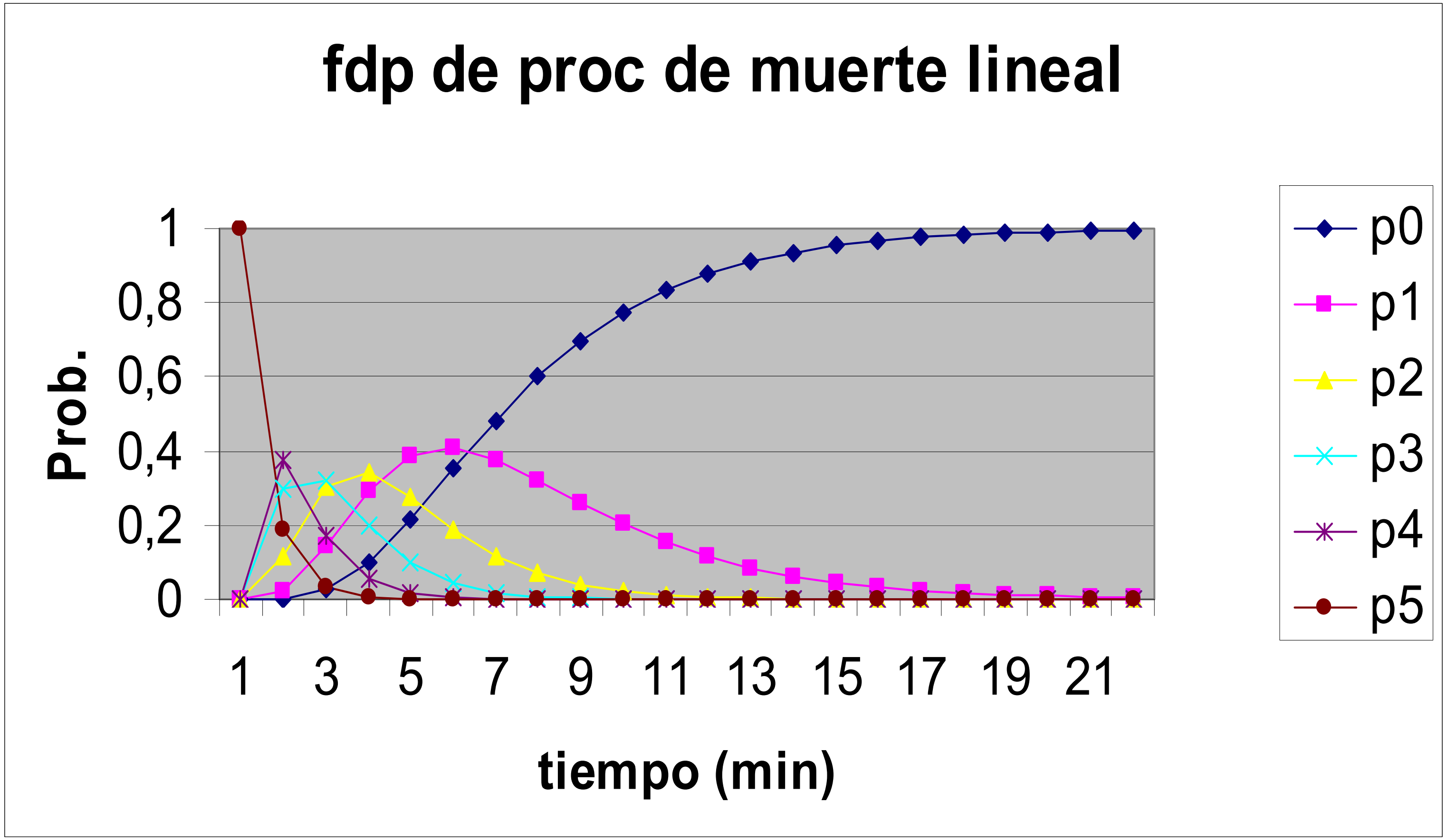
m= N-n con m=0…N $Y(t)_{/t=0} = 0$

$$p_m(t) = \binom{N}{m} * \exp\left(-(N-m) * \mu * t\right) * \left[1 - \exp\left(-\mu * t\right)\right]^m$$

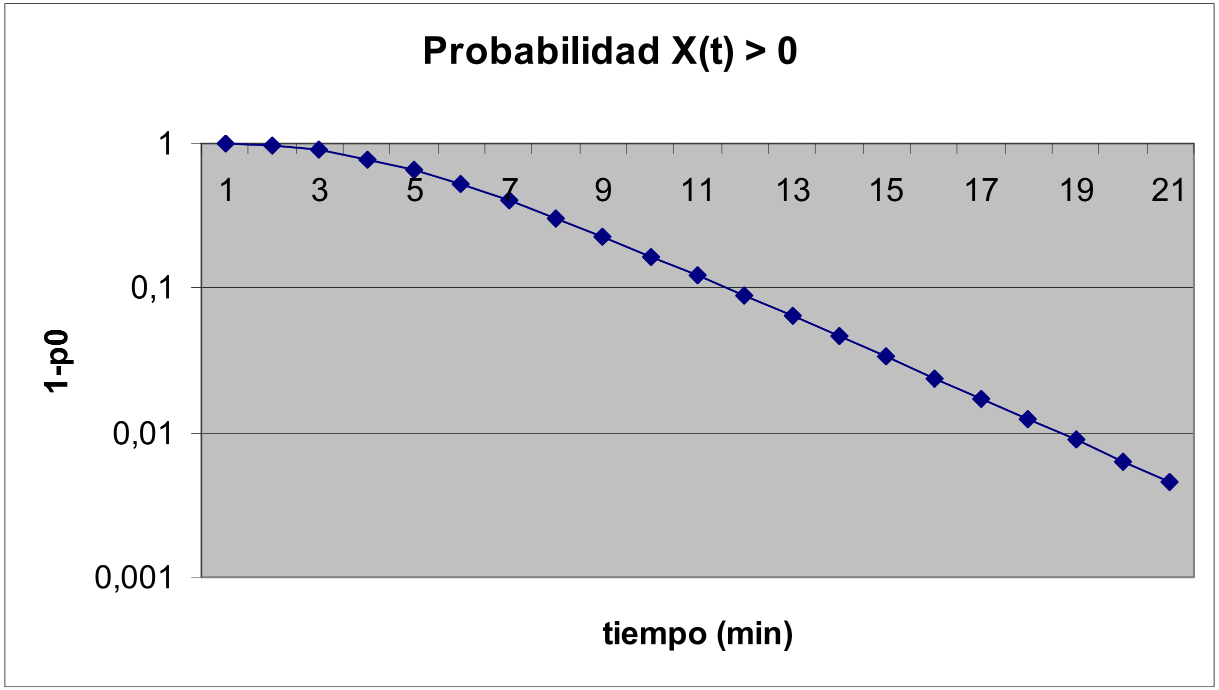
$$p_N(t) = 1 - \Sigma_{m=0\ldots N-1}\, p_n(t)$$

- Ejemplo
  - Se quiere reservar una capacidad de 2 Mbps realizado por un grupo E1 (32 circuitos básicos con 64kbps cada uno) para la transmisión de una videoconferencia
  - Desde medidas se sabe que antes de la hora de la reservación el grupo E1 esta ocupado por un máximo cinco llamadas (N=5)
  - El operador quiere saber a partir de que tiempo τ antes de la videoconferencia tiene que bloquear los circuitos para llamadas telefónicas y que la probabilidad de que se terminen los cinco llamadas sea menor que 0,01. Se sabe que el tiempo medio de las llamadas es de 3 min y su fdp es una exponencial negativa
  - Se modela con una cadena de muerte lineal y se calcula el valor τ bajo la condición que $\Pr\{ X(t_{)/t=\tau}) > 0\} < 0{,}01$

Proceso de muerte lineal VI



Proceso de muerte lineal VII



El proceso de nacimiento y muerte I

- El proceso de nacimiento y muerto es un proceso X(t) en que:
  - el nacimiento ocurre con una tasa λ_n
  - la muerte con una tasa μ_n
- En el caso de ser homogéneo resultan las probabilidades de transición

  $p_{n,n+1}= \lambda_n*\Delta t$

  $p_{n,n-1}= \mu_n*\Delta t$

  $p_{n,n} = 1- (\lambda_n +\mu_n)$ para $n >0$

  $p_{0,0} = 1-\lambda_0*\Delta t$
- y en caso de un proceso troncado

  $p_{N,N} = 1-\mu_N*\Delta t$
- para los elementos de la matriz del generador infitisimal Q resulta

  $q_{0,0} = - \lambda_0$

  $q_{n,n+1} = \lambda_n$

  $q_{n,n-1} = \mu_n$

  $q_{n.n} = -(\lambda_n + \mu_n)$
- y en el caso de un proceso troncado

  $q_{N,N} = - \mu_N$

- finalmente resultan los ecuaciones al futuro

  $dp_0(t)/dt = - \lambda_0 * p_0(t) + \mu_1 * p_1(t)$

  como **(primera) ecuación diferencial marginal**

  $dp_n(t)/dt = \lambda_{n-1} * p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} * p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) * p_n(t)$

  como **ecuación diferencial general**

- y en caso de un proceso troncado

  $dp_N(t)/dt = \lambda_{N-1} * p_{N-1}(t) - \mu_N * pN(t)$

  como segunda ecuación marginal

- La solución general de estas ecuaciones diferenciales requieren un conocimiento de los parámetros λ_n y μ_n para n=0….∞ (N)

- En contrario para la solución en la convergencia al estado estacionario (estado ergodico) permite deducir una solución genérica porque se soluciona desde un sistema de ecuaciones lineales

$$0 = - \lambda_0 * p_0(t) + \mu_{1*} p1(t)$$

$$0 = \lambda_{n-1} * p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} * p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) * p_n(t)$$

para n=1…N-1

y

$$\Sigma_{n=0 \ldots N} \, p_n = 1$$

El proceso de nacimiento y muerte IV

- Resultan las (siguientes) **formulas regeneratorias** del proceso de nacimiento y muerte
- El estado ergodico existe si el denominador en ambos formulas es finito que resulta
- **Lema:**
  - Para N finito el estado ergodico siempre existe independiente de λ_n y μ_n
  - Para N infinito el estado ergodico existe si $\lambda_n < \mu_{n+1}$ para todos los n=0….∞

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_k / \mu_{k+1}} \qquad p_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\lambda_k / \mu_{k+1}}{1+\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_k / \mu_{k+1}}$$

para n > 0

- Aplicaciones:
  - Las formulas regeneratorias proporcionan unas ecuaciones genéricas para las fdp de todos los sistemas de cola incluyendo los sistemas de cola con cola cero (sistema de perdida pura)
  - Permite deducir la relación entre la perdida temporal (time loss $P_l(t)$) y el bloqueo temporal (time blocking $p_N(t)$)
  - Resulta

$$P_L(t) = p_N(t) * \lambda_N dt / E[\lambda(t)]dt \quad \text{con}$$

$$E[\lambda(t)] = \Sigma_{n=0\ldots N}\, p_n(t) * \lambda_n$$

  - En el caso que el estado ergodico existe resulta:

$$P_L = p_N * \lambda_N / E(\lambda_n) \quad \text{con } E(\lambda_n) = \Sigma_{n=0\ldots N}\, p_n * \lambda_n$$

El proceso de nacimiento y muerte sencillo I

- El proceso de nacimiento y muerte sencillo es un proceso de nacimiento y muerte X(t) con

  $\lambda_n = \lambda$ para n= 0….∞ y $\mu_n = \mu$ para n = 1…∞

  $X(t)/_{t=0} = 0$

  – resultan las ecuaciones al futuro

  $dp_0(t)/dt = - \lambda^*p_0(t) + \mu^*p_1(t)$

  como **ecuación diferencial marginal**

  $dp_n(t)/dt = \lambda^*p_{n-1}(t) + \mu^*p_{n+1}(t) -(\lambda + \mu)^*p_n(t)$

  como **ecuación diferencial general**

El proceso de nacimiento y muerte sencillo II

- Con el esquema de los seis pasos (incluyendo la transformación de Z y Laplace resulta

F(z,s) = [z – μ*(1-z)*p_0(s)]/[s*z-(1-z)*(μ-λ*z)] con

$$p_0(s) = \int_0^{\infty} p_0(t) \cdot \exp(-st)dt$$

Su retransmisión da como solución

$$p_n(t) = \exp[-(\lambda+\mu)*t]*[\rho^{n/2}*I_n(a*t) + \rho^{(n-1)/2} *I_{(n+1)}(a*t)+ (1- \rho)*\rho^n*\Sigma_{j=n+2\ldots\infty}\ \rho^{-j/2} *I_j(a*t)]$$

con $\rho = \lambda/\mu$; $a = 2*\mu*\rho^{0,5}$ y

$$I_n(x) = \Sigma_{m=0\ldots\infty}(x/2)^{n+2*m}/[(n+m)!*m!] \quad n \geq 0$$

(funcion modificado de Bessel)

El proceso de nacimiento y muerte sencillo IV

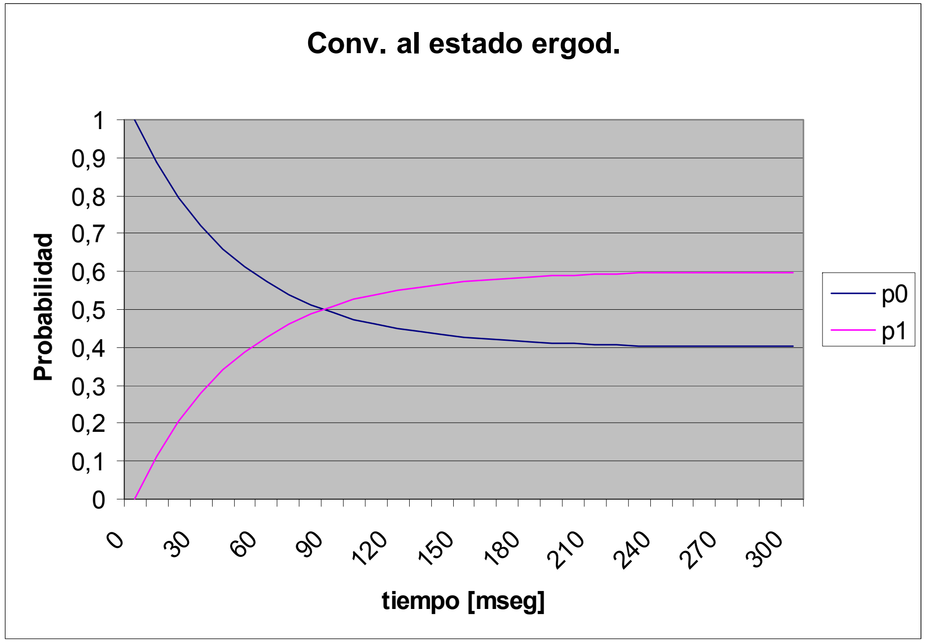
- Interpretación del resultado sobre el proceso de nacimiento y muerte
  - Es el proceso más sencillo de la teoría de cola (memoria infinita, un único servidor, infinitas fuentes)
  - La fdp del proceso $p_n(t) = Pr\{X(t)=n\}$ para $n= 0\ldots\infty$ que proporciona las probabilidades absolutas es una función analíticamente complejo y prácticamente no manejable para el análisis de rendimiento o el dimensionado de sistemas de cola
  - En el caso existe la convergencia a la estacionaridad (estado ergódico) la fdp se transforma en una función muy sencilla, ese convergencia existe en la practica para $t >> \Delta t$
  - Entonces con la fdp en el estado ergódico $p_n = Pr\{X=n\}$ se puede realizar tanto un análisis de rendimiento como un dimensionado de sistema de cola de forma sencilla
  - El caso general $p_n(t) = Pr\{X(t)=n\}$ proporciona la evolución temporal de las probabilidades desde un estado inicial $X(t)/_{t=0}$ y se considera en casos singulares e.g. caída y reiniciación de un sistema de cola

El proceso de nacimiento y muerte sencillo V

Cadena de nacimiento y muerte de dos estados			
t0 [mseg]	**80**	**t1 [mseg]**	**120**
Lambda [1/seg]	0,0125	My [1/seg]	0,008333333
p0 (ergodico)	0,4	p1 (ergodico)	0,6

t [mseg]	p0(t)	p1(t)	p0(t)+p1(t)
0	1	0	1
10	0,8872	0,1128	1
20	0,7955	0,2045	1
30	0,7212	0,2788	1
40	0,6608	0,3392	1
50	0,6117	0,3883	1
60	0,5719	0,4281	1
70	0,5396	0,4604	1
80	0,5133	0,4867	1
90	0,492	0,508	1
100	0,4747	0,5253	1
110	0,4607	0,5393	1
120	0,4493	0,5507	1
130	0,44	0,56	1
140	0,4325	0,5675	1
150	0,4264	0,5736	1
160	0,4214	0,5786	1
170	0,4174	0,5826	1
180	0,4141	0,5859	1
190	0,4115	0,5885	1
200	0,4093	0,5907	1
210	0,4076	0,5924	1
220	0,4061	0,5939	1
230	0,405	0,595	1
240	0,404	0,596	1
250	0,4033	0,5967	1
260	0,4027	0,5973	1
270	0,4022	0,5978	1
280	0,4018	0,5982	1
290	0,4014	0,5986	1
300	0,4012	0,5988	1

Ejemplo sobre la convergencia al estado ergódico en una cadena de nacimiento y muerte de dos estados



El proceso de nacimiento y muerte sencillo VI

- La fdp del proceso de nacimiento y muerte sencillo en el estado ergódico se deduce con las formulas regeneratorias resultando:

$$p_n = (\lambda/\mu)^n / \Sigma_{k=0\ldots N} (\lambda/\mu)^n \text{ para } n=0\ldots.N$$

- En el caso de N→∞ la condición para que la convergencia a la estacionaridad existe es λ<μ (la tasa de nacimiento debe ser inferior a la tasa de muerte)

Proceso de nacimiento y muerte mixto I

- El proceso de nacimiento y muerte mixto es un proceso de nacimiento y muerte X(t) con

  $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = n*\mu$ para $n = 1\ldots\infty$ y $X(t)/_{t=0} = 0$
- resultan las ecuaciones al futuro

  $$dp_0(t)/dt = -\lambda*p_0(t) + \mu*p_1(t)$$

  como **ecuación diferencial marginal**

  $$dp_n(t)/dt = \lambda*p_{n-1}(t) + (n+1)*\mu*p_{n+1}(t) - (\lambda + n*\mu)*p_n(t)$$

  como **ecuación diferencial general**
- Con el esquema de los seis pasos (incluyendo la transformación de Z) resulta la ecuación diferencial parcial en las variables z y t

  $$\delta F(z,t)/\delta t + \mu*(1-z)*\delta F(z,t)/\delta z + \lambda*(1-z)*F(z,t) = 0$$
- cuya solución es:

  $$F(z,t) = \exp\{(\lambda/\mu)*(z-1)*[1-\exp(-\mu*t)]\}$$

Proceso de nacimiento y muerte mixto II

- Su retransformación resulta la fdp de la cadena:

  $p_n(t) = (\zeta(t)^n/n!)*\exp[-\zeta(t)]$ con

  $\zeta(t) = (\lambda/\mu)*[1-\exp(-\mu*t)]$

- en la convergencia a la estacionaridad (estado ergódico) resulta

  para $t \rightarrow \infty$ y $(\lambda/\mu) \leq K < \infty$

  $p_n = [(\lambda/\mu)^n/n!]*\exp(-\lambda/\mu)$ y $E(X) = \lambda/\mu$, $V(X) = \lambda/\mu$

  $Id(X) = 1$

- Interpretación
  - El resultado del proceso describe un trafico tipo Poisson con trafico por fuente a= λ/μ y considerando infinitos fuentes
  - Este resultado forma la base para la deducción de la formula de Erlang-B que se considera en el siguiente capitulo

Proceso de nacimiento y muerte lineal I

- El proceso de nacimiento y muerte lineal es un proceso de nacimiento y muerte X(t) con

  $\lambda_n = n^*\lambda$ para n= 0….∞ y $\mu_n = n^*\mu$ para n = 1…∞ y $X(t)/_{t=0} = 1$

- resultan las ecuaciones al futuro

  $dp_1(t)/dt = - \lambda^*p_1(t) + 2^*\mu^*p_2(t)$

  como **ecuación diferencial marginal**

  $dp_n(t)/dt = (n-1)^*\lambda^*p_{n-1}(t) + (n+1)^*\mu^*p_{n+1}(t) - n^*(\lambda + {}^*\mu)^*p_n(t)$

  como **ecuación diferencial general**

- Con el esquema de los seis pasos (incluyendo la transformación de Z) resulta la ecuación diferencial parcial en las variables z y t

  $$\delta F(z,t)/\delta t + (\lambda^*z-\mu)^*(1-z)^*\delta F(z,t)/\delta z = 0$$

Proceso de nacimiento y muerte lineal II

Su solución y retransformación resulta la fdp de la cadena para n >0

$$p_n(t) = \left[\frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu \cdot \exp\left[-\left(\lambda - \mu\right) \cdot t\right]} \right]^2 * \left[\lambda \cdot \frac{1 - \exp[-(\lambda - \mu) \cdot t}{\lambda - \mu \cdot \exp[-(\lambda - \mu) \cdot t} \right]^{n-1} * \exp[-(\lambda - \mu) * t]$$

Se nota que el estado $p_0(t)$ puedes ser absorbente con

$$p_0(t) = \left[\mu \cdot \frac{1 - \exp[-(\lambda - \mu) \cdot t}{\lambda - \mu \cdot \exp[-(\lambda - \mu) \cdot t} \right]$$

- Para $t \rightarrow \infty$ resulta con

  $\lambda < \mu \quad p_0 \rightarrow 1$

  $\lambda > \mu \quad p_0 = \mu/\lambda$
- el valor medio resulta

  $E[X(t)] = \exp[(\lambda-\mu)*t]$
- Interpretación
  - El proceso asume que la tasa de nacimiento crece linealmente con el número de nacimientos en la cadena y entonces la tasa de muerte crece igual linealmente con el número de unidades en la cadena
  - El proceso tiene que iniciarse desde un número de nacimientos en el sistema n0 >0 (el la deducción se considera el caso n0 =1)
  - Esos condiciones se aplican en casos prácticos en sistemas de “partyline” “chats” etc.