Redes de Comunicación

Introducción a los Sistemas de cola y SdC tipo Markov con fuentes infinitos

Instructor:
Dr.-Ing. K. D. HACKBARTH
Ultima versión 21.08. 2012

- Introducción a SdC
- Glosario de variables
- Relación entre los variables de un SdC
- El SdC M/M/1
- El SdC M/M/S
- El SdC M/M/1/K+1
- El SdC M/M/S/S
- El SdC M/M/S/K+S

- Un **Sistema de Cola SdC** se compone de:
  - Un proceso estocástico de llegada producido desde las fuentes
  - Un proceso estocástico de salida (servicio) producido por los servidores
  - Un número de servidores
  - Un número limitado o ilimitado de fuentes
  - Una cola de K plazas
  - Una disciplina de recogida de peticiones desde la cola
- **Kendall** ha introducido una anotación abreviado para caracterizar un tipo de SdC

Elemento de la Anotación de Kendall	Abreviación	Comentarios
Proceso de llegada	M, D, E_k, H_k, Gi, G	En la literatura se aplica también G=Gi
Proceso de servicio	M, D, E_k, H_k, Gi, G	En la literatura se aplica tanbien G=Gi
Numero de Servidores	S	Tiene que estar siempre mayor igual a 1
Número de fuentes	M	Limitado o ilimitado
Número de plazas de Cola	K 0, limitado, ilimitado	El caso d K=0 induce un sistema de perdida pura y el K ilimitad un sistema de espera pura
Numero de estados del proceso	K+S	
Disciplina de cola	FIFO, LIFO, FIRO	Se aplica también FCFS, FCLS, FCRS

Introducción a SdC III

- En su forma más general se abrevia un SdC como
- G/G/S/M/K+S/disciplina de cola
- En este capitulo estudiamos solamente proceso de Markov con disciplina de Cola FIFO resultando
- M/M/S/M/K+S/FIFO
- Distinguimos entre SdC con fuente infinito o finitos y plazas finito o infinito,
- el valor de infinito es por defecto en la anotación de Kendall y entonces no se indica resultando el siguiente esquema de SdC tipo Markov que vamos a estudiar
- En esta sub-capitulo estudiamos los SdC con fuentes infinitos

	∞	**M finito**
∞	M/M/S	M/M/S/M/
K finito	M/M/S/K+S	M/M/S/M/K+S
K= 0	M/M/S/S	M/M/S/M/S

- Cualquier de estos SdC se puede solucionar en su estado ergódico con las **formulas regeneratorias** visto en el capitulo de los procesos de nacimiento y muerte

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k / \mu_{k+1}}$$

$$p_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k / \mu_{k+1}}{1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k / \mu_{k+1}}$$

Glosario de variables I

- Las variables para describir un SdC y su compartimento se dividen en
  - Variables del estado
  - Variables temporales
  - Otros variables

Abreviación	Significativo
n	Número de unidades en el sistema (cola plus servidores)
u	Numero de unidades en la cola
v	Numero de unidades en los servidores
w	Numero de servidores non-ocupados

Glosario de variables II

Abreviación (sin notataciónn del indice k	**Significativo**
ΘA	Intervalo de tiempo entre dos llegadas (iid)
ΘD	Intervalo de tiempo entre dos salidas
$T_{w,}$ T_f	Duración de espera en la cola con Tw ≥ 0 y T_f > 0
T_s	Duración del servicio
τ	Intervalo de tiempo entre la entrada de un elemento y su salido a partir del servicio

Abreviación	**Significativo**
M	Número de fuentes
K	Número de plazas en la cola
S	Número de servidores
K+S	Capacidad máxima del SdC
λ_n	Tasa de llegada total
α	Tasa de llegada por fuente libre
μ_n	Tasa de salida

Relación entre los variables de un SdC I

- La **formula de Little** expresa la relación entre el estado del sistema n(t), el retardo τ(t) y la tasa de llegada λ(t)
- Es valido para cualquier SdC no solamente para los SdC tipo Markov
- Es valido también para sub-parte del SdC sobre todo el retardo en la cola
- Resulta:

$$n(t) = \tau(t) * \lambda(t)$$
$$u(t) = T_w(t) * \lambda(t)$$

- y en el **estado ergódico**

$$E(n) = E(\tau) * E(\lambda)$$
$$E(u) = E(T_w) * E(\lambda)$$

- Las relaciones entre los variables temporales de un SdC resultan:

$$\Theta A_k = t_a^{(k)} - t_a^{(k-1)}$$

$$\tau_k = t_w^{(k)} + t_s^{(k)}$$

$$\Theta D_k = [t_a^{(k)} + t_w^{(k)} + t_s(^{k)}] - [\ t_a^{(k-1)} + t_w^{(k-1)}\ ) + t_s^{\ (k-1)}]$$

- Las relaciones entre los variables del estado de un SdC resultan:

$$n = \begin{cases} v & \text{si } \leq S \\ u + S & \text{si } n > S \end{cases}$$

$u = n\text{-}v$ ocupación de la cola

$m = M - n$ número de fuentes libres

$S = v + w$

- Los valores de un SdC en el estado ergódico (convergencia a la estacionaridad) resultan de la fdp en el estado ergódico

$$p_n = \lim_{t \to \infty} p_n(t)$$

- que resulta:

$$E(n) = \Sigma_{n=1 \ldots S+K}\, n^* p_n$$
$$E(u) = \Sigma_{n=S+1 \ldots S+K}\, (n-S)^* p_n$$
$$E(v) = \Sigma_{n=1 \ldots S}\, n^* p_n + S^* \Sigma_{n=S+1 \ldots S+K}\, p_n$$
$$E(n) = M - E(m)$$
$$E(\lambda) = E(m)^* \alpha$$
$$E(\tau) = E(n)/E(\lambda)$$
$$E(T_w) = E(u)/\, E(\lambda)$$

SdC M/M/1- I

- Es el SdC clásico que corresponde a una tarjeta de entrada a un enrutador y su procesado o a una tarjeta de salida a un sistema de transmisión
- Se asume que la memoria de entrada o salida sea suficiente grande para despreciar la perdida de paquetes (**Sistema de espera pura**)
- Es un modelo básico que sirve para la comparación o extensión a modelos más sofisticado
- Corresponde completamente al proceso de nacimiento y muerte sencillo
- Resulta con los formulas regeneratorias la fdp, FDP y otros probabilidades en el estado ergódico

$$A = \lambda * t_s = \lambda / \mu$$
$$p_o = 1 - A$$
$$p_n = (1-A)* A^n$$
$$P_w = A$$
$$F_X(n) = (1-A)*\Sigma_{i=1\ldots n} A^n$$
$$Pr(\tilde{n} > n)= 1- F_X(n) = A^{n+1}$$

$$p_o = 1 - A$$

$$p_n = (1 - A) \cdot A^n$$

$$p_W = A$$

$$\overline{n} = \frac{A}{1 - A}$$

$$\overline{u} = \frac{A^2}{1 - A}$$

$$\overline{t}_W = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{A}{1 - A}$$

$$\overline{t}_f = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - A}$$

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - A}$$

Observaciones:

1) A es el trafico que se ofrece al sistema M/M1 y se calcula por

   $A = \lambda * t_s = \lambda/\mu$ con

   $t_s = L_p*8/v_s$; $\mu = 1/t_s$

   v_s velocidad del servidor

   L_p longitud del paquete en octetos

2) El trafico A se denomina en la literatura también como factor de uso ρ

3) $F_{Tw}(t) = 1-A*\exp [-(1-A)t/t_s]$

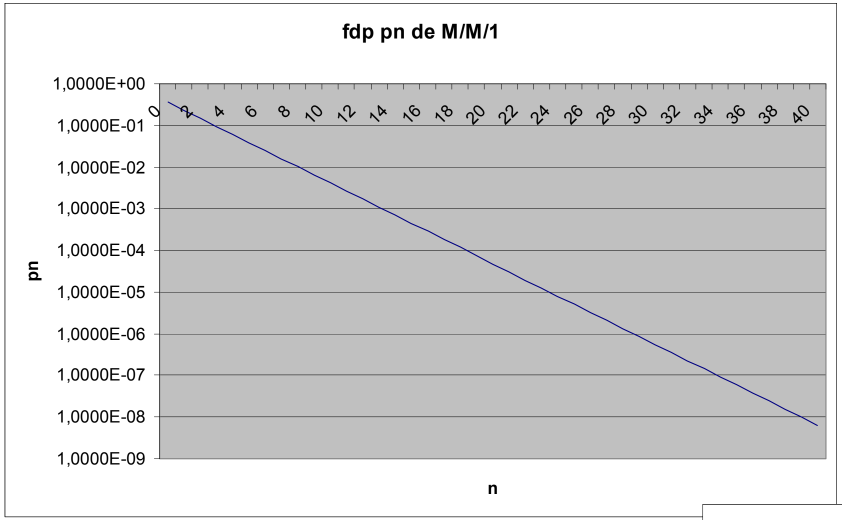
4) $F_{Tf}(t) = 1-*\exp [-(1-A)t/ts]$

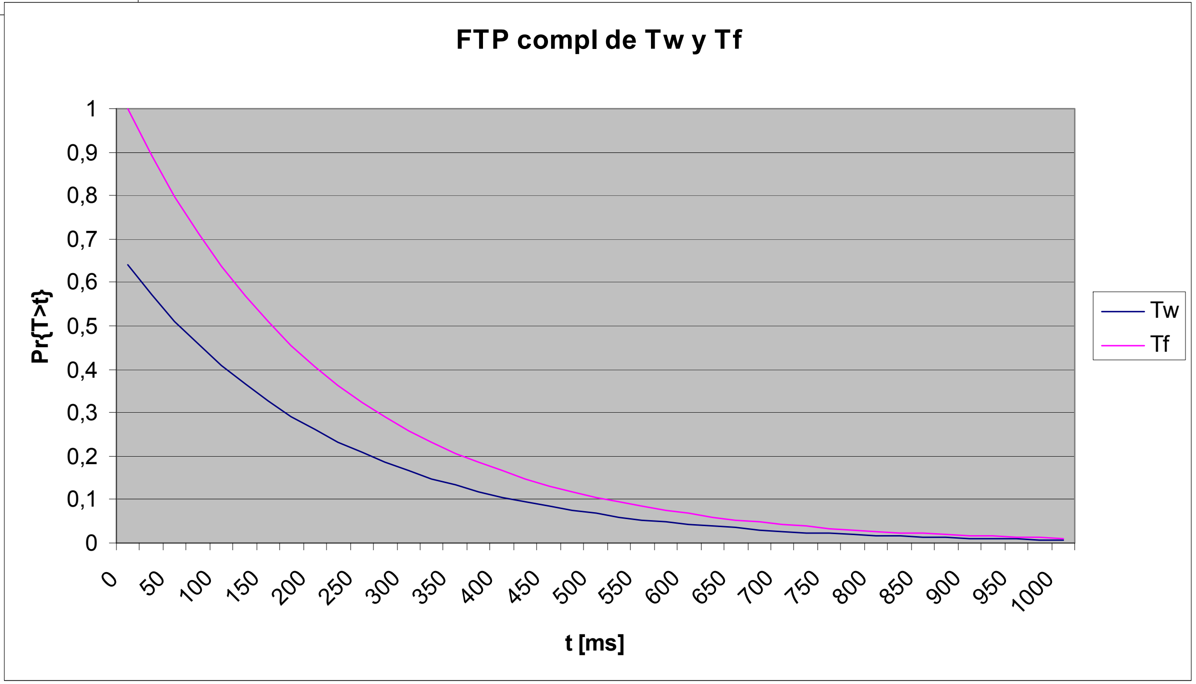
L [koct]	20	ts seg	0,08
λ [p/seg]	8	A	0,64
vs kbit/s	2000	PLR	0,000001

Ejemplo transmisión de una pagina WEB

n	1,7778
u	1,1378
v	0,64
τ	0,2222
t_w [seg]	0,1422
t_f [seg]	0,2222
K	29
t_{max} ref L [seg]	2,4

SdC M/M/1- III


fdp pn de M/M/1
pn
n
1,0000E+00
1,0000E-01
1,0000E-02
1,0000E-03
1,0000E-04
1,0000E-05
1,0000E-06
1,0000E-07
1,0000E-08
1,0000E-09
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40


FTP compl de Tw y Tf
Pr{T>t}
t [ms]
Tw
Tf
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800 850 900 950 1000

- El SdC M/M/S es una expansión del SdC M/M/1y es también un sistema de espera pura
- Erlang ya lo ha estudiado para la asignación de líneas de telefonía a correspondientes peticiones
- Para distinguir el SdC M/M/S del Sistema de pérdida pura M/M/S/S se anota como la formula de Erlang-1 o formula de Erlang-C
- Se puede demostrar que un sistema M/M/S con v_s resulta peor en su rendimiento que un sistema M/M/1 con $v_s = S^*v_s$
- Entonces se aplica sobre todo en zonas rurales donde líneas de transmisión de alta velocidad no lleguen usando varios líneas de transmisión con velocidad reducida

$$p_o = \left[\sum_{k=0}^{S-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^S}{S! \cdot \left(1 - \frac{A}{S}\right)} \right]^{-1}$$

Probabilidad que es SdC es vació

$$p_n = \begin{cases} p_o \cdot A^n / n!, n \leq S \\ p_o \cdot \frac{A^n}{S!} \cdot \frac{1}{S^{n-S}}, n \geq S \end{cases}$$

fdp del M/M/S

$$P_W = p_o \cdot \frac{A^S}{S! \cdot \left(1 - \frac{A}{S}\right)}$$

Probabilidad de que todos los servidores sea ocupados (formula de **Erlang-1 o Erlang-C**)

$$\overline{n} = A \cdot \left(1 + \frac{P_W}{S - A}\right)$$

$$\overline{u} = A \cdot \frac{P_W}{S - A}$$

$$\overline{t}_W = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{P_W}{S - A}$$

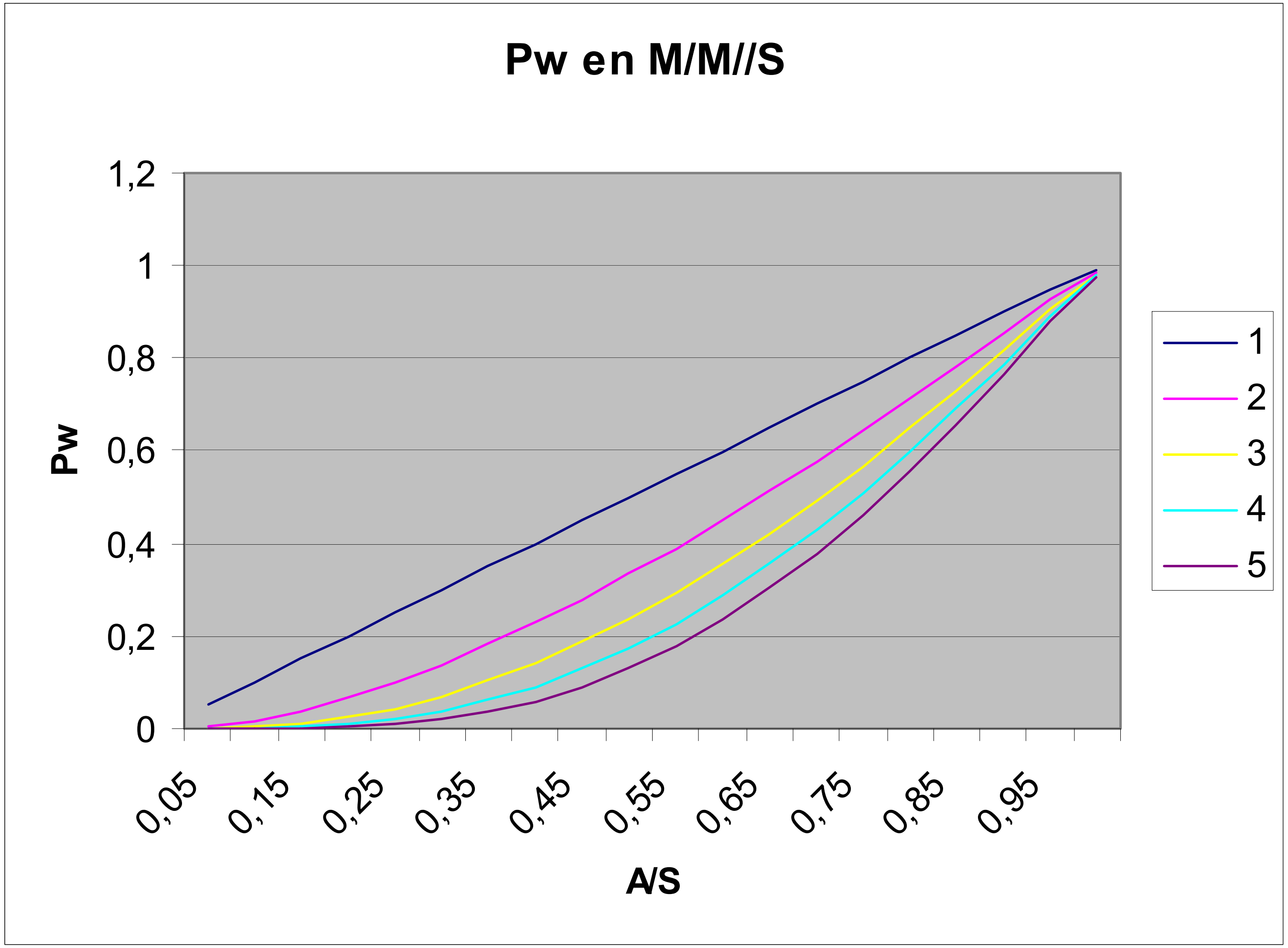
$$\overline{\tau} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{P_W}{S - A} + 1\right)$$

SdC M/M/S III

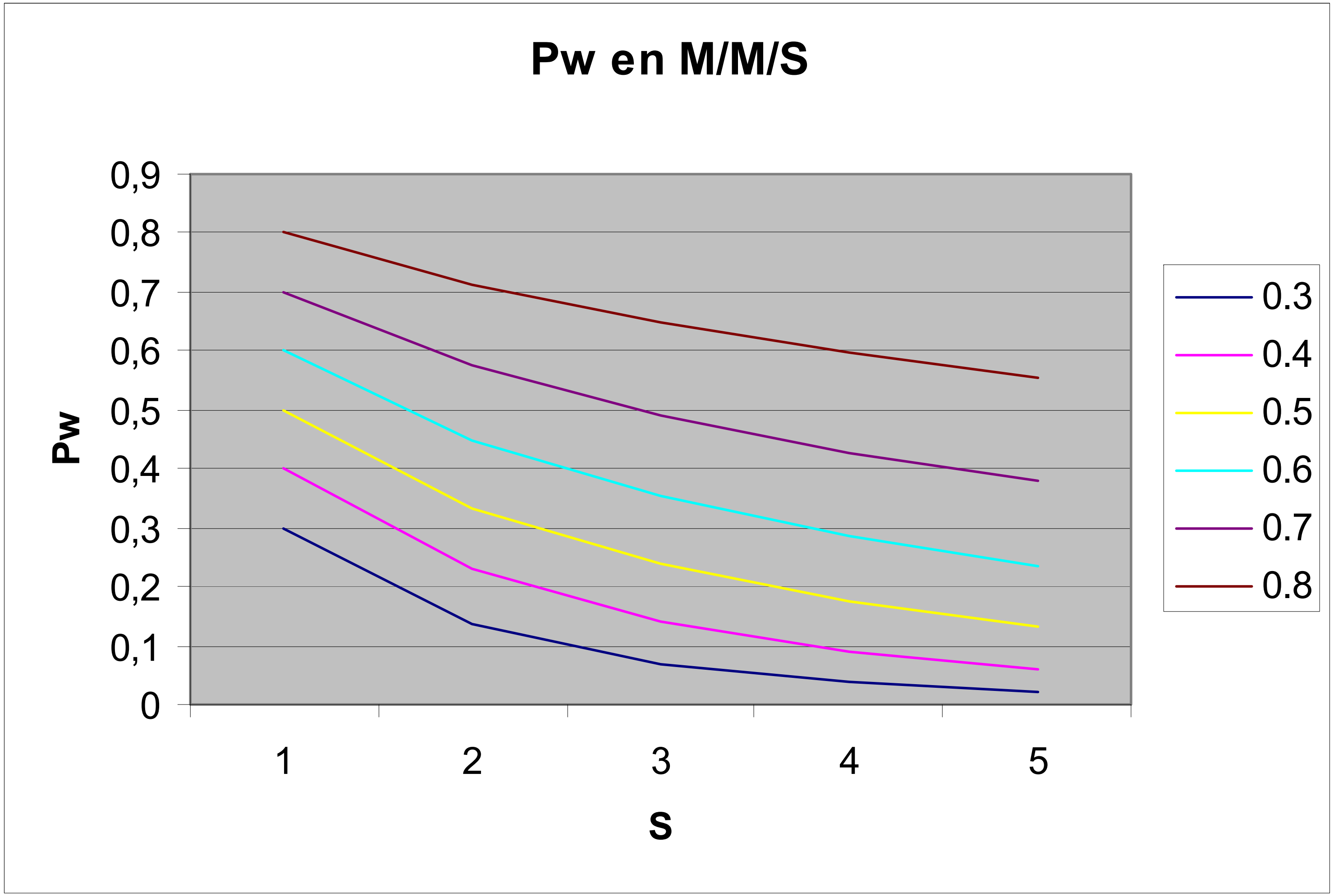
Ejemplo

- El trafico media (grado de uso) por servidor de un SdC M/M/S esta dado por:
- $\rho = A/S$
- Se calcula P_w como función de A, S con ρ variable independiente y Pw resultado de la formula de Erlang-C

ρ S	1	2	3	4	5
0,05	0,05	0,00476	0,00051	0,00006	0,00001
0,1	0,1	0,01818	0,0037	0,00079	0,00018
0,15	0,15	0,03913	0,01139	0,00349	0,0011
0,2	0,2	0,06667	0,02466	0,00958	0,00383
0,25	0,25	0,1	0,04412	0,02041	0,00971
0,3	0,3	0,13846	0,07003	0,03705	0,02014
0,35	0,35	0,18148	0,10242	0,0603	0,03643
0,4	0,4	0,22857	0,14118	0,0907	0,0597
0,45	0,45	0,27931	0,18607	0,12853	0,09081
0,5	0,5	0,33333	0,23684	0,17391	0,13037
0,55	0,55	0,39032	0,29317	0,2268	0,17876
0,6	0,6	0,45	0,35474	0,28704	0,23615
0,65	0,65	0,51212	0,42124	0,35442	0,30255
0,7	0,7	0,57647	0,49234	0,42865	0,37784
0,75	0,75	0,64286	0,56776	0,50943	0,46179
0,8	0,8	0,71111	0,64719	0,59643	0,55411
0,85	0,85	0,78108	0,73038	0,68932	0,65447
0,9	0,9	0,85263	0,81706	0,78775	0,76249
0,95	0,95	0,92564	0,90701	0,89142	0,8778
0,99	0,99	0,98503	0,98117	0,97791	0,97503



P_w como función de A/S con S parámetro



Pw como función de S con A/S parámetro

Comparación	**Basis**	**S*M/M/1**	**M/M/S**	**M/M/1**
vt kbit/s	**64**	64	64	320
L koct	**20**	20	20	20
λ	**1,2**	0,24	1,2	1,2
S	**5**	**5 x 1**	**5**	**1**
ts	**2,5**	2,5	2,5	0,5
A Erlang	3	0,6	3	0,6
Pw		0,6	0,23615	0,6
n		1,5	3,14872	1,5
u		0,9	0,35423	0,9
tw		3,75	0,29519	0,75
tau		6,25	2,62393	1,25

- El SdC M/M/1/K+1 es el caso realista del SdC M/M/1
- Es un SdC de espera y pérdida con el peso en las características de la espera
- Se aplica sobre todo en enrutadores situado en la entrada a una red
- Se consigue una perdida de paquetes en el caso de una tasa elevada y no prevista
- Entonces se evita que un número elevado de paquetes entran en la red y lo congestionan desde dentro

fdp del estado

$$p_0 = (1-A)/(1-A^{K+2})$$

$$p_n = p_0 *A^n \quad n \leq K+1$$

$$P_w = A*(1-A^K)/(1-A^{K+2})$$

$$P_b = A^{K+1}*(1-A)/(1-A^{K+2})$$

Variable des estado

$$E(v) = A^*(1-A^{K+1})/(1-A^{K+2})$$

$$E(u) = p_0{}^*A^*\Sigma_{n=1\ldots K}\ n^*A^n$$

$$E(n) = E(u) + E(v)$$

Variables temporales

$$E(\tau) = E(n)/\lambda = (ts/A) * E(n)$$

$$E(T_w) = E(u)/\lambda = (t_s/A) * E(u)$$

$$\tau_{max} \approx K^*ts$$

SdC M/M/1/K+1 - IV

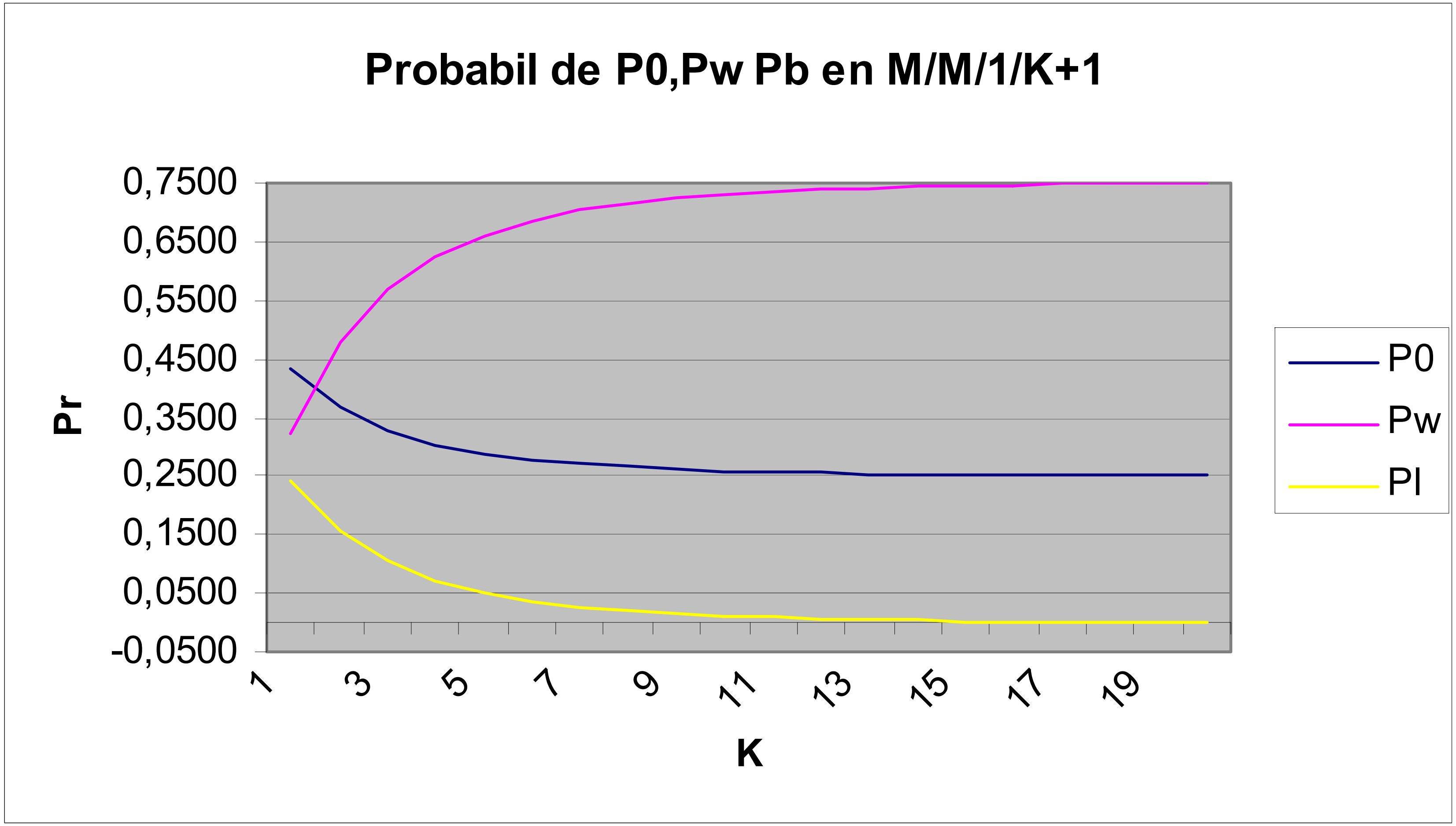
- En un MODEM-GSM con velocidad de 9,6 kbps entran 6 paquetes/s con longitud media de 150 octetos
- Se requiere estudiar la influencia de la memoria

M/M/1/K+1	
L oct	150
v_s kbit/s	9,6
λ p/s	**6**
ts s	0,125
A	0,75

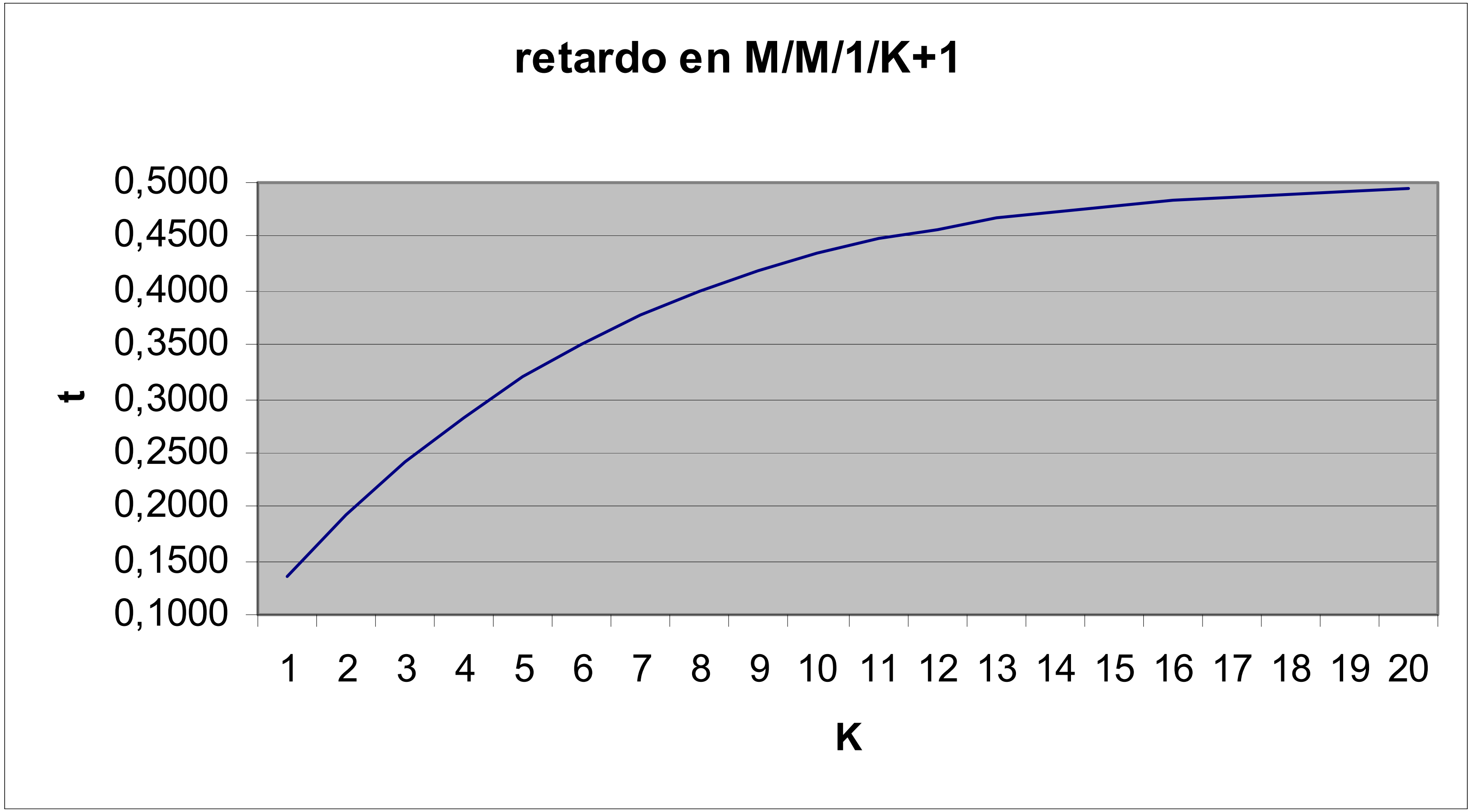
ts= L*8/vs = 150*8/9600 = 0,125 s

A= λ*ts = 6*0,125 = 0,75

K	P_0	P_w	P_l	E(n)	E(τ) [s]	τ_{max} [s]	Pr tmax
1	0,4324	0,3243	0,2432	0,8108	0,1351	0,25	0,2432
2	0,3657	0,4800	0,1543	1,1486	0,1914	0,375	0,1543
3	0,3278	0,5685	0,1037	1,4443	0,2407	0,5	0,1037
4	0,3041	0,6237	0,0722	1,7009	0,2835	0,625	0,0722
5	0,2885	0,6601	0,0513	1,9217	0,3203	0,75	0,0513
6	0,2778	0,6851	0,0371	2,1100	0,3517	0,875	0,0371
7	0,2703	0,7026	0,0271	2,2694	0,3782	1	0,0271
8	0,2649	0,7152	0,0199	2,4033	0,4005	1,125	0,0199
9	0,2610	0,7243	0,0147	2,5149	0,4192	1,25	0,0147
10	0,2582	0,7309	0,0109	2,6074	0,4346	1,375	0,0109
11	0,2561	0,7358	0,0081	2,6836	0,4473	1,5	0,0081
12	0,2545	0,7394	0,0060	2,7460	0,4577	1,625	0,0060
13	0,2534	0,7421	0,0045	2,7968	0,4661	1,75	0,0045
14	0,2525	0,7441	0,0034	2,8380	0,4730	1,875	0,0034
15	0,2519	0,7456	0,0025	2,8712	0,4785	2	0,0025
16	0,2514	0,7467	0,0019	2,8979	0,4830	2,125	0,0019
17	0,2511	0,7475	0,0014	2,9193	0,4866	2,25	0,0014
18	0,2508	0,7481	0,0011	2,9364	0,4894	2,375	0,0011
19	0,2506	0,7486	0,0008	2,9499	0,4917	2,5	0,0008
20	0,2504	0,7490	0,0006	2,9607	0,4934	2,625	0,0006
100	0,2500	0,7500	0,0000	3,0000	0,5000	12,625	6,01E-14


Probabil de P0,Pw Pb en M/M/1/K+1
0,7500
0,6500
0,5500
0,4500
0,3500
0,2500
0,1500
0,0500
-0,0500
Pr
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
K
P0
Pw
PI

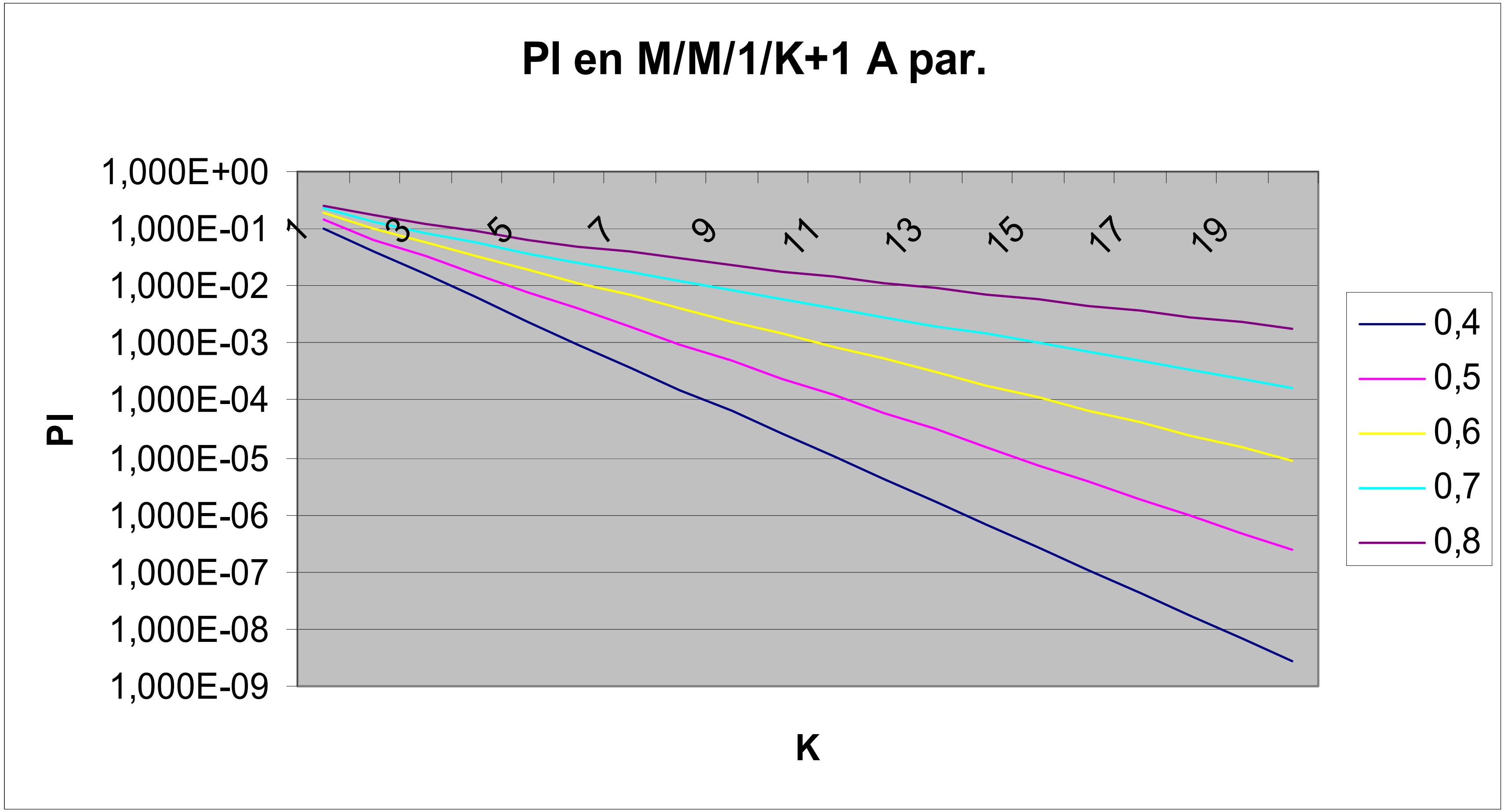
SdC M/M/1/K+1 - VII



A	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
K			Pb		
1	1,026E-01	1,429E-01	1,837E-01	2,237E-01	2,623E-01
2	3,941E-02	6,667E-02	9,926E-02	1,354E-01	1,734E-01
3	1,552E-02	3,226E-02	5,621E-02	8,658E-02	1,218E-01
4	6,169E-03	1,587E-02	3,263E-02	5,714E-02	8,882E-02
5	2,462E-03	7,874E-03	1,920E-02	3,846E-02	6,634E-02
6	9,837E-04	3,922E-03	1,139E-02	2,622E-02	5,040E-02
7	3,933E-04	1,957E-03	6,787E-03	1,802E-02	3,876E-02
8	1,573E-04	9,775E-04	4,056E-03	1,246E-02	3,007E-02
9	6,292E-05	4,885E-04	2,427E-03	8,645E-03	2,349E-02
10	2,517E-05	2,442E-04	1,454E-03	6,015E-03	1,845E-02
11	1,007E-05	1,221E-04	8,719E-04	4,193E-03	1,454E-02
12	4,027E-06	6,104E-05	5,228E-04	2,927E-03	1,150E-02
13	1,611E-06	3,052E-05	3,136E-04	2,044E-03	9,117E-03
14	6,442E-07	1,526E-05	1,881E-04	1,429E-03	7,241E-03
15	2,577E-07	7,629E-06	1,129E-04	9,993E-04	5,759E-03
16	1,031E-07	3,815E-06	6,771E-05	6,990E-04	4,586E-03
17	4,123E-08	1,907E-06	4,063E-05	4,891E-04	3,656E-03
18	1,649E-08	9,537E-07	2,438E-05	3,422E-04	2,916E-03
19	6,597E-09	4,768E-07	1,462E-05	2,395E-04	2,327E-03
20	2,639E-09	2,384E-07	8,775E-06	1,676E-04	1,858E-03
100	3,857E-41	1,972E-31	1,568E-23	6,792E-17	3,259E-11

Prob. de perdida en relación con A y K

SdC M/M/1/K+1 - IX


PI en M/M/1/K+1 A par.
1,000E+00
1,000E-01
1,000E-02
1,000E-03
1,000E-04
1,000E-05
1,000E-06
1,000E-07
1,000E-08
1,000E-09
PI
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
K
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8

SdC M/M/S/S - I

- El SdC M/M/S/S corresponde a un **sistema de pérdida pura** (plaza de colas K=0)
- Se modela con un proceso de nacimiento con tasa constante y tase de muerte lineal
- Es en el sentido rígido ningún SdC pero se puede solucionar igual como cualquier SdC con las formulas regeneratorias
- Sus valores caracterizas son:

S, λ, t_s (entrada)
$P_0, P_S = p_b = p_l$
$p_n = (A^n/n!)/ \Sigma_{i=o \ldots S} A^i/i!$
$A = \lambda * t_s$
$\rho = A*(1-p_b)/S$ (resultados)
y con S=N

$P_b = B(N,A) = A^N/N!/[\Sigma\, i=_{0 \ldots N} A^{i/}i!]$ **Formula de Erlang-B**
$P_l = P_b$ (PASTA)

de que resulta:

$A_0 = A;\ _;\ A_c = A_0*(1-p_b);\ \ A_p = A_0*p_b$

- La formula de Erlang se puede calcular en forma recursiva por:

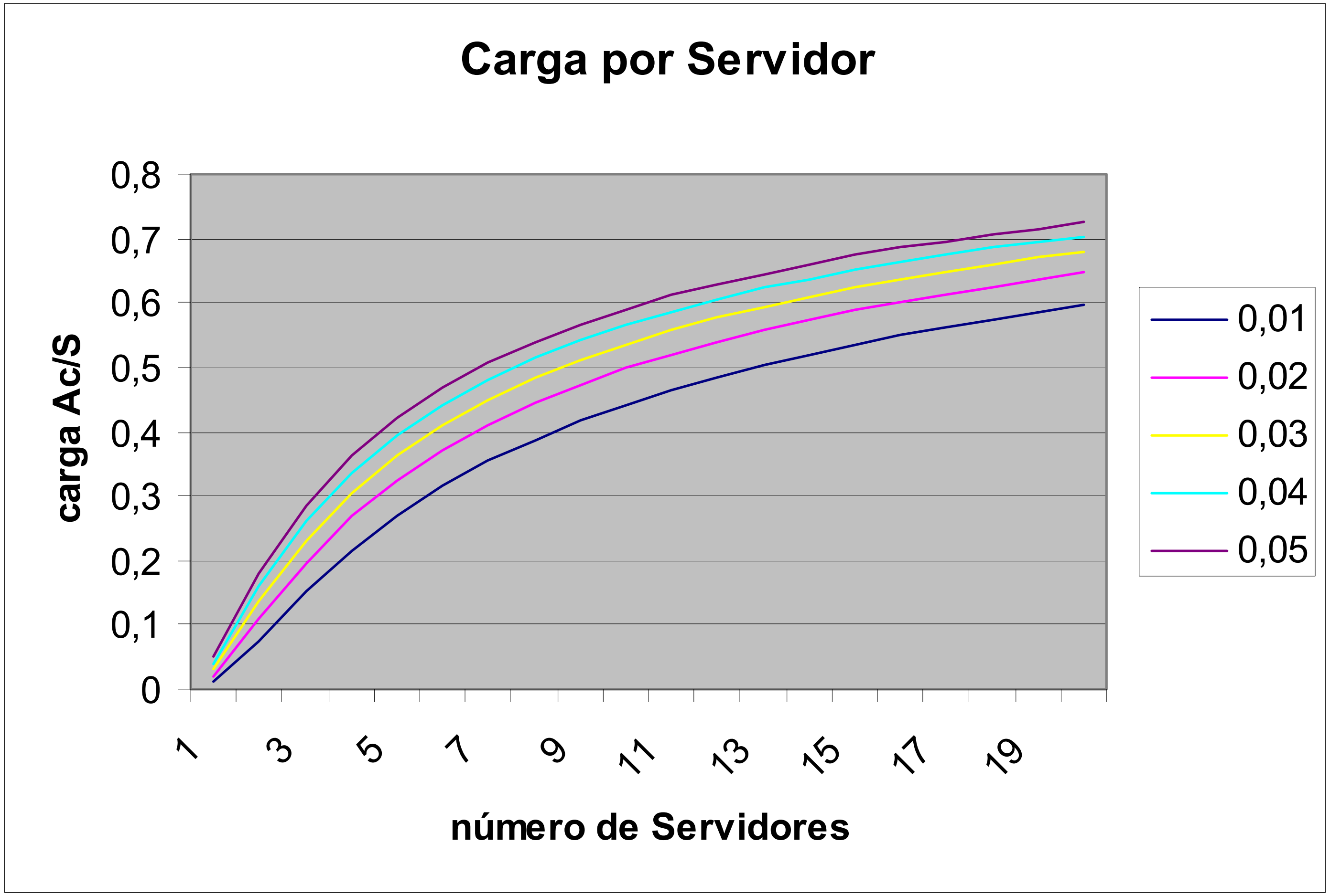
$$B(1,A)= A/(1+A)$$
$$B(N,A) = 1/\{ 1 + N/[A*B(N-1,A)]\}$$

- El calcula depende de los parámetros y su tiempo de procesamiento en un ordenar y crece linealmente con N
- La formula es solamente valido para N entero positivo que limita su aplicación
- La formula de Erlang-B da una cuota superior para el caso de fuentes limitadas, porque el calculo exacto se realiza con la formula de Engset

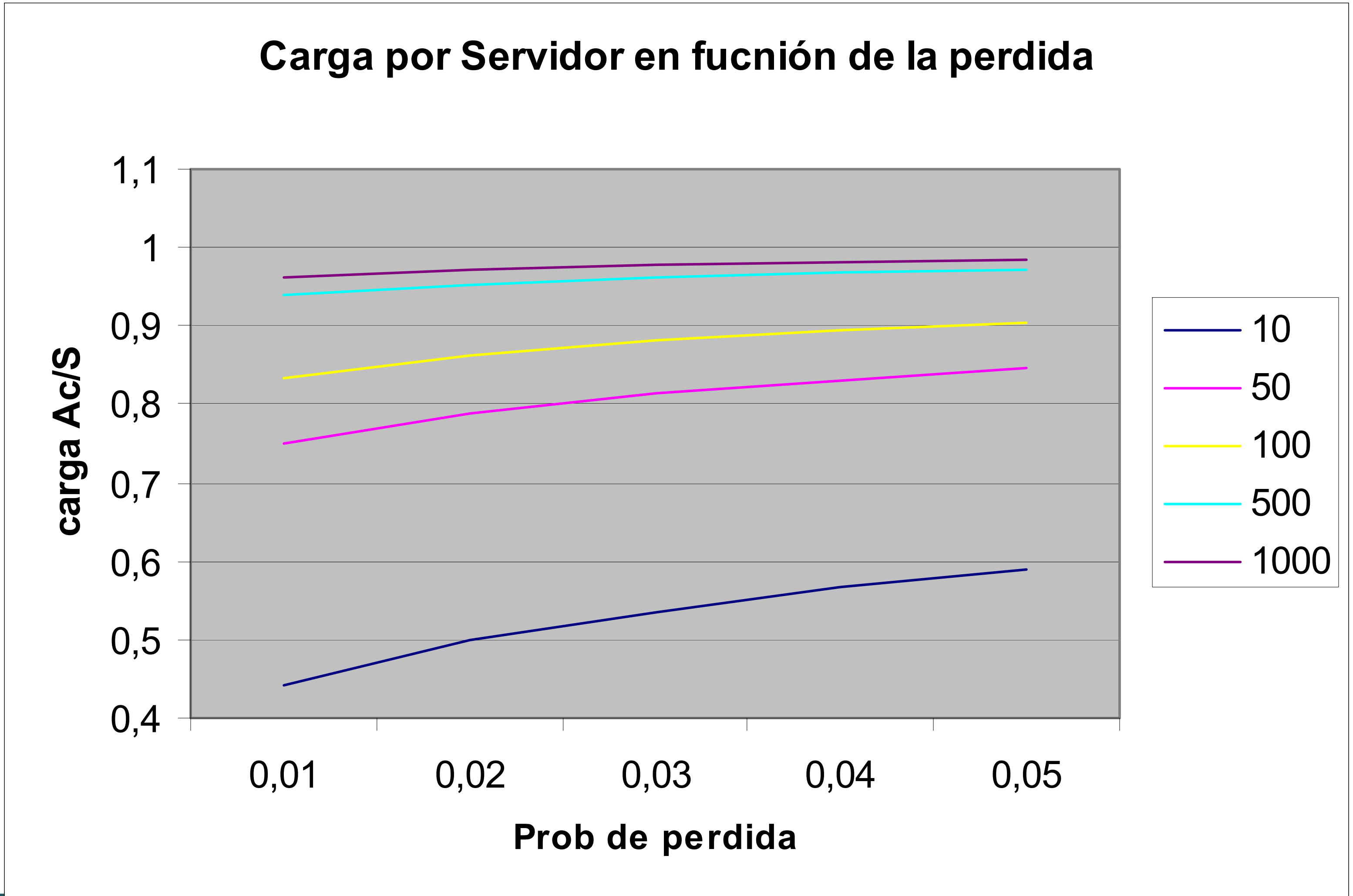
Ejemplo de una tabla Erlang-B

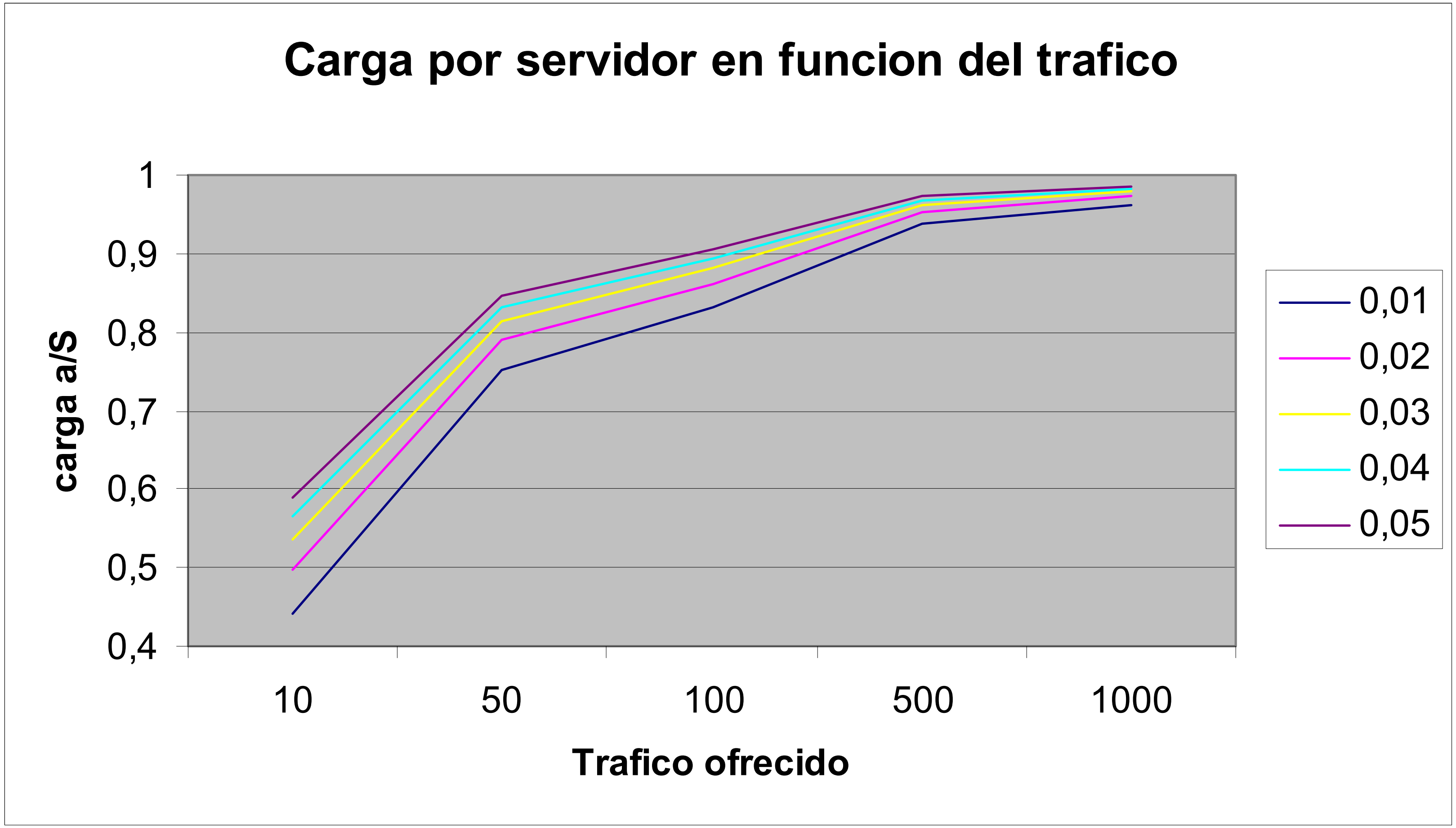
	trafico ofrecido Ao				
S / pb	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**
1	0,0101	0,0204	0,0309	0,0417	0,0526
2	0,1526	0,2235	0,2816	0,3333	0,3813
3	0,4555	0,6022	0,7151	0,8120	0,8994
4	0,8694	1,0923	1,2589	1,3994	1,5246
5	1,3608	1,6571	1,8752	2,0573	2,2185
6	1,9090	2,2759	2,5431	2,7649	2,9603
7	2,5009	2,9354	3,2497	3,5095	3,7378
8	3,1276	3,6271	3,9865	4,2830	4,5430
9	3,7825	4,3447	4,7479	5,0796	5,3702
10	4,4612	5,0840	5,5294	5,8954	6,2157
11	5,1599	5,8415	6,3280	6,7272	7,0764
12	5,8760	6,6147	7,1410	7,5727	7,9501
13	6,6072	7,4015	7,9667	8,4300	8,8349
14	7,3517	8,2003	8,8035	9,2977	9,7295
15	8,1080	9,0096	9,6500	10,1745	10,6327
16	8,8750	9,8284	10,5052	11,0594	11,5436
17	9,6516	10,6558	11,3683	11,9516	12,4613
18	10,4369	11,4909	12,2384	12,8504	13,3852
19	11,2301	12,3330	13,1150	13,7552	14,3147
20	12,0306	13,1815	13,9974	14,6654	15,2493

SdC M/M/S/S - IV



Carga por Servidor
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
carga Ac/S
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
número de Servidores
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05


Carga por Servidor en fucnión de la perdida
carga Ac/S
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
Prob de perdida
10
50
100
500
1000


Carga por servidor en funcion del trafico
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
carga a/S
10
50
100
500
1000
Trafico ofrecido
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05

Convergencia de la formula de Erlang para N grande

Sea lim $N \to \infty$ [A/N] = ρ implica

B=0 $\quad 0 < \rho <= 1$

B = 1 –1/ρ para $\rho > 1$

La convergencia para $\rho < 1$ es exponencial

	1000	**2500**	**5000**	**10000**
A^0=N	0.025	0.017	0.011	0.008
A^0=0.99*N	0.019	0.01	0.005	0.003

Estimaciones para la formula de Erlang

Se pueden deducir varias aproximaciones para B(N,A) y incluso para B(x,N) con x número real positivo

A) Para A grande y pl<<1 se puede estimar N (sobre estimación) con

$$\mathbf{N \approx A^*[1\text{-}p_l]}$$

B) Una estimación resulta de la siguiente formula

$$\mathbf{[B(N,A)]^{-1} = \Sigma_{j=0\ldots v} N(N\text{-}1)\ldots(N\text{-}j\text{+}1)^*A^{-j}}$$

para N >100 pl<<1 la suma converge rápidamente y el calculo se puede terminar antes

SdC M/M/S/S - IX

Ejemplo de

N= 100;

A= 90 Erlang

B=0,026968

N	100	A	90	0,02696806
	incr	B_inv	B	error rel.
init	1,111111111	2,11111111	0,47368421	16,5646368
2	1,222222222	3,33333333	0,3	10,12427
3	1,330864198	4,66419753	0,21439915	6,95011355
4	1,434375857	6,09857339	0,16397277	5,08025806
5	1,530000914	7,6285743	0,13108609	3,8607903
6	1,615000965	9,24357527	0,10818325	3,01153222
7	1,686778786	10,9303541	0,09148834	2,39247016
8	1,743004746	12,6733588	0,07890568	1,92589365
9	1,781738184	14,455097	0,06917975	1,5652474
10	1,801535275	16,2566323	0,06151336	1,28097059
11	1,801535275	18,0581675	0,0553766	1,05341433
12	1,781518217	19,8396858	0,05040402	0,86902658
13	1,741928923	21,5816147	0,04633574	0,71817079
14	1,683864625	23,2654793	0,04298214	0,59381629
15	1,609026198	24,8745055	0,0402018	0,49071908
16	1,519635853	26,3941414	0,0378872	0,40489132
17	1,418326796	27,8124681	0,0359551	0,33324737
18	1,30801249	29,1204806	0,03434009	0,27336154
19	1,191744713	30,3122254	0,03298999	0,22329851
20	1,072570242	31,3847956	0,03186256	0,18149248
21	0,953395771	32,3381914	0,03092319	0,14665968
22	0,836869621	33,175061	0,03014312	0,11773419
23	0,725287005	33,900348	0,02949822	0,09382063
24	0,620523326	34,5208713	0,02896798	0,07415887
25	0,523997476	35,0448688	0,02853485	0,05809784
26	0,436664563	35,4815334	0,02818367	0,04507603
27	0,359035307	35,8405687	0,02790134	0,03460691
28	0,291217527	36,1317862	0,02767646	0,02626811
29	0,232974022	36,3647602	0,02749915	0,01969324
30	0,183790617	36,5485508	0,02736087	0,01456553

La formula de Erlang-C calcula la probabilidad de espera en un sistema de espera M/M/S mientras la de Erlang-B la probabilidad de pérdida en un sistema M/M/S/S

Entre ambos resulta la siguiente relación (**Dualidad entre la formula de Erlang-C y Erlang-B)**

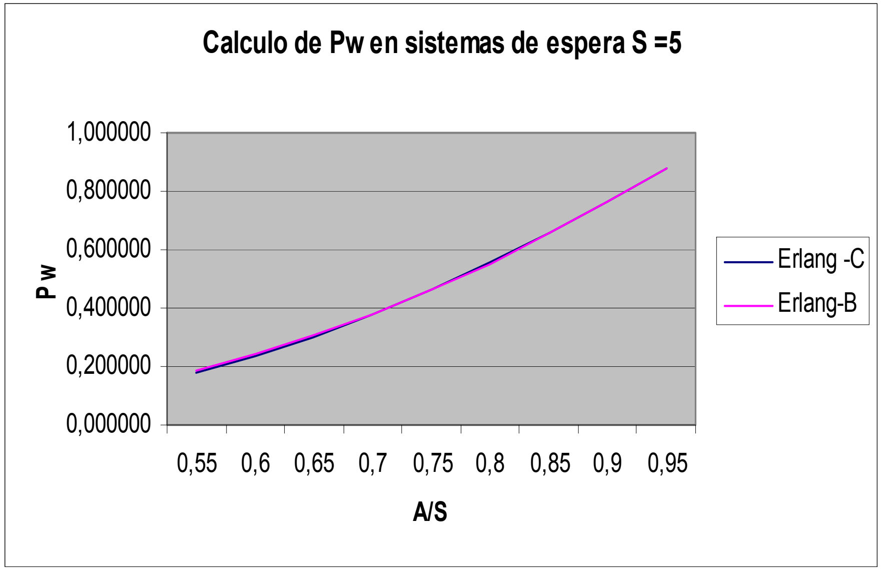
$$p_w = \frac{S \cdot p_b}{S - A(1 - p_b)}$$

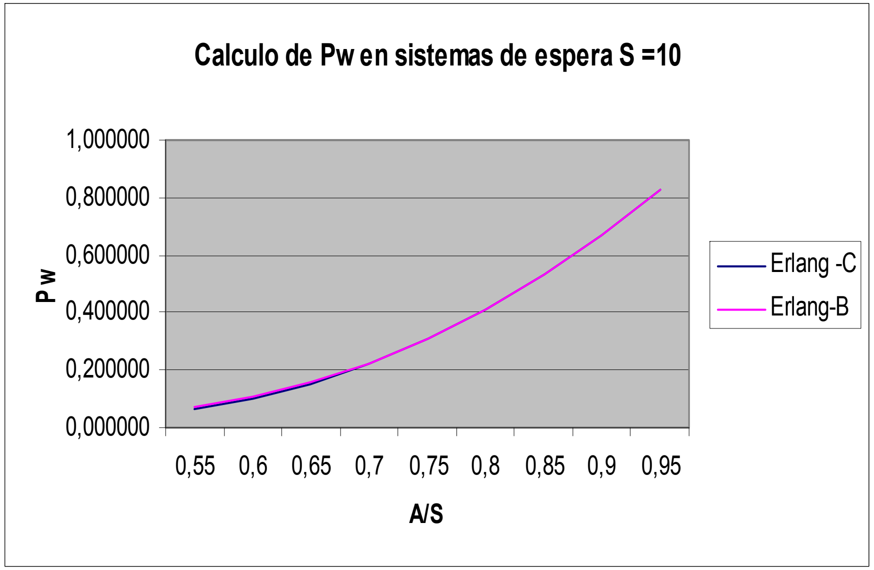
con: $$p_w = \frac{\dfrac{A^S \cdot S}{S!(S-A)}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{S-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^S \cdot S}{S! \cdot (S-A)}}$$ y $$p_b = \frac{\dfrac{A^S}{S!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{S} \frac{A^i}{i!}}$$

SdC M/M/S/S - XI

S	5			
K	10000000			
	Pw con Formula	Pw con Formula		Pb con Formula
A/S	Erlang-C	Erlang-B	error rel	Erlang-B
0,55	0,178760	0,185635	0,0385	0,093034304
0,6	0,236152	0,240584	0,0188	0,112468273
0,65	0,302552	0,304583	0,0067	0,132919187
0,7	0,377838	0,378212	0,0010	0,154319579
0,75	0,461789	0,461262	0,0011	0,176308711
0,8	0,554113	0,553196	0,0017	0,198476038
0,85	0,654470	0,653596	0,0013	0,220589123
0,9	0,762493	0,761896	0,0008	0,242415604
0,95	0,877799	0,877488	0,0004	0,263690559

Dualidad entre sistema de perdida y Espera				
S	10			
K	10000000			
	Pw con Formula	Pw con Formula		Pb con Formula
A/S	Erlang-C	Erlang-B	error rel	Erlang-B
0,55	0,062788	0,068564	0,0920	0,032062664
0,6	0,101299	0,105513	0,0416	0,045057595
0,65	0,153715	0,156769	0,0199	0,061094898
0,7	0,221731	0,222763	0,0047	0,079174781
0,75	0,306611	0,307196	0,0019	0,099790436
0,8	0,409180	0,408686	0,0012	0,121442767
0,85	0,529861	0,529323	0,0010	0,144341067
0,9	0,668732	0,668342	0,0006	0,167717412
0,95	0,825586	0,825241	0,0004	0,191009032





- El SdC M/M/S/K+S es el caso más general
- Sus valores características son:

S, K, λ, t_s (entrada)

P_0, P_w, P_S, $P_S+K = p_b$ y

t_w, t_f, pl, $\rho = A^*(1-p_l)/S$ (resultados)

- No suele tener muchos aplicaciones en los redes de paquetes
- Tiene amplia aplicación en el dimensionado de centros de atención al cliente donde corresponde :

S al numero de empleados

S+K al número de líneas

- t_w a la duración media de espera (incondicional)
- t_f a la duración media de espera excluyendo las peticiones que no debe esperar

SdC M/M/S/S+K - II

$$p_o = \left[\sum_{k=0}^{S-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^S}{S!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{S}\right)^{K+1}}{1 - \frac{A}{S}} \right]^{-1}$$

$$p_n = \begin{cases} p_o \cdot \frac{A^n}{n!}, n \leq S \\ p_o \cdot \frac{A^n}{S! \cdot S^{n-S}}, S \leq n \leq K + S \end{cases}$$

$$P_W = p_o \cdot \frac{A^S}{S!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{S}\right)^K}{1 - \frac{A}{S}}$$

$$P_l = p_o \cdot \frac{A^{K+S}}{S! \cdot S^K}$$

$$\overline{n} = \overline{u} + p_o \cdot \left[\sum_{n=1}^{S-1} n \cdot \frac{A^n}{n!} + S \cdot \frac{A^S}{S!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{S}\right)^{K+1}}{1 - \frac{A}{S}} \right]$$

$$\overline{u} = p_o \cdot \frac{A^S}{S!} \cdot \sum_{k=1}^{K} k \cdot \left(\frac{A}{S}\right)^k$$

Ejemplo call center					
M/M/S/K+S					
ts min	**1,5**				
lamda pet/min	**3**				
Ao	4,5				
S	**5**	**5**	**6**	**7**	**6**
nº de lineas	**5**	**10**	**10**	**10**	**12**
K	0	5	4	3	6
Pw	0	0,525	0,3203	0,1657	0,3673
Pb	0,243	0,0757	0,0371	0,0214	0,0199
n	0,9	5,4777	4,8493	4,5863	5,1545
u	0	1,3184	0,5161	0,1826	0,744
rho	0,6813	0,8319	0,7222	0,6291	0,7351
tw seg	0	26,368	10,322	3,652	14,88
tf seg	0	50,2248	32,226	22,0398	40,5118