Redes de Comunicación

Sistemas de colas tipo Markov

con fuentes finitos

Instructor:

Dr.-Ing. K.D. HACKBARTH

Versión 30. 10 2012

Contenido del capítulo

Motivación (1/4)

- En el estudio de SdC se tiene que distinguir claramente entre la fuente y el terminal
- El terminal puede dar lugar a infinitas fuentes o a una única fuente
- El primer caso se da con servicios en los que el terminal puede mandar continuamente paquetes, sin estar bloqueado por la confirmación sobre la correcta llegada, al destino, de paquetes anteriores
- Ejemplos de servicios en los que hay una fuente con un flujo continuo de paquetes
  - Servicio de video en forma de streaming, sobre UDP/IP
  - Servicio FTP mediante TCP/IP, asumiendo que la ventana deslizante no se cierra

Motivación (2/4)

- Las fuentes finitas se dan, por ejemplo, cuando el emisor requiere una confirmación de su último paquete antes de mandar el siguiente
  - El esquema corresponde al protocolo “*stop and wait*”
- Como ejemplos se podrían nombrar todos los servicios de transacción
  - Compra online
  - Reserva de vuelos
  - Banca electrónica
  - etc

Motivación (3/4)

- Las fuentes finitas se deben considerar también en sistemas de pérdida pura
- En este caso, el terminal se corresponde con la fuente (e.g. el teléfono)
- Cuando existe un alto número de terminales, se usa la formula de Erlang-B, que asume un número infinito de fuentes
- Cuando el número de fuentes es limitado, la fórmula de Erlang-B estima un bloqueo superior al real
  – Además no se puede aplicar la condición $p_b=p_L$, ya que $p_L < p_b$

Motivación (4/4)

- Se debe usar, por tanto, un modelo M/M/S/M/S<M, que se estudia con la fórmula de "*Engset*", que se presenta en este capítulo
- Ejemplos
  - Dimensionado de un concentrador rural
  - Dimensionado de una pico célula en redes móviles (GSM o UMTS)

Introducción (1/5)

- Un SdC con fuentes finitas se da cuando el número de terminales (fuentes) que pueden pedir *todavía* una conexión depende de las fuentes ya ocupadas
- Se definen los siguientes parámetros por fuente

$$Pr\{\text{llegada petición fuente libre en } [t+\Delta t]\} = \alpha\Delta t + o(\Delta t)$$

$$E(T_0) = t_0 = \frac{1}{\alpha} \qquad f_{T_0}(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$ *thinking time*

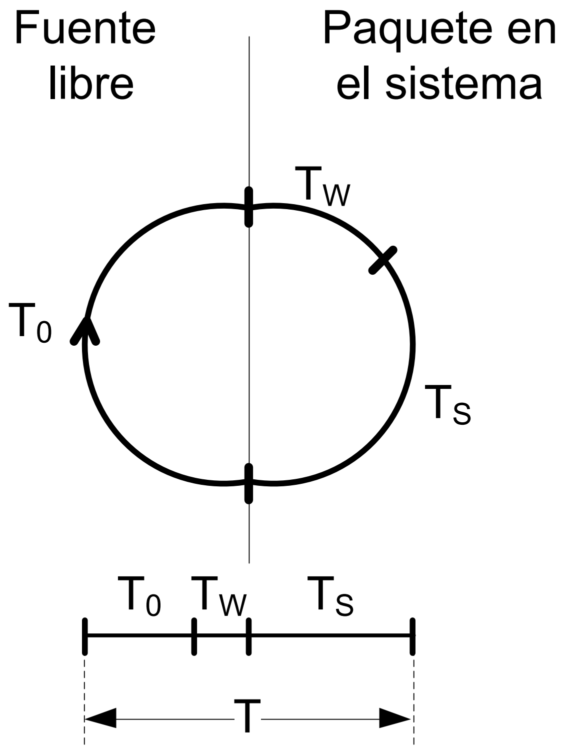
$$E(T_S) = t_S = \frac{1}{\mu} \qquad f_{T_S}(t) = \mu e^{-\mu t}$$ *service time*

$$E(T_W) = t_W$$ *waiting time*

Introducción (2/5)

- Resulta el tiempo total de un ciclo se puede definir como…

$$T = T_0 + T_W + T_S$$



Introducción (3/5)

- Asumimos ahora que hay M fuentes que realizan el servicio de manera independiente entre sí
- Cada fuente tiene la misma tasa α y el mismo parámetro de servicio μ
- Resulta un sistema de cola M/M/S/M/S+K, con…

$$\lambda_n = \alpha(M - n)$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 1 \ldots S \\ S\mu & n \geq S \end{cases}$$

Introducción (4/5)

- La tabla clasifica los SdC que se van a considerar en este capítulo

Tipo de SdC	Valor de S	Valor de K	Kendall Annotation
Sistema de espera pura con un servidor	1	K = M-1	M/M/1/M/K+1≥M
Sistema de espera pura con S servidores	< M	K = M-S	M/M/S/M/K+S≥M
Sistema de pérdida pura	< M	K = 0	M/M/S/M/S<M

Introducción (5/5)

- Observamos que todavía se modelan sistemas de tipo Markov, porque asumimos tanto para T_0 como para T_S una fdp de tipo exponencial negativo
- Se pueden establecer la fdp de p_n en la estacionalidad mediante los fórmulas regeneratorias
- A partir de la fdp de p_n se pueden calcular los valores medios para n (sistema), u (cola) y v (servidor)
- Usando la fórmula de Little se pueden calcular lo valores medios temporales para t_W y τ

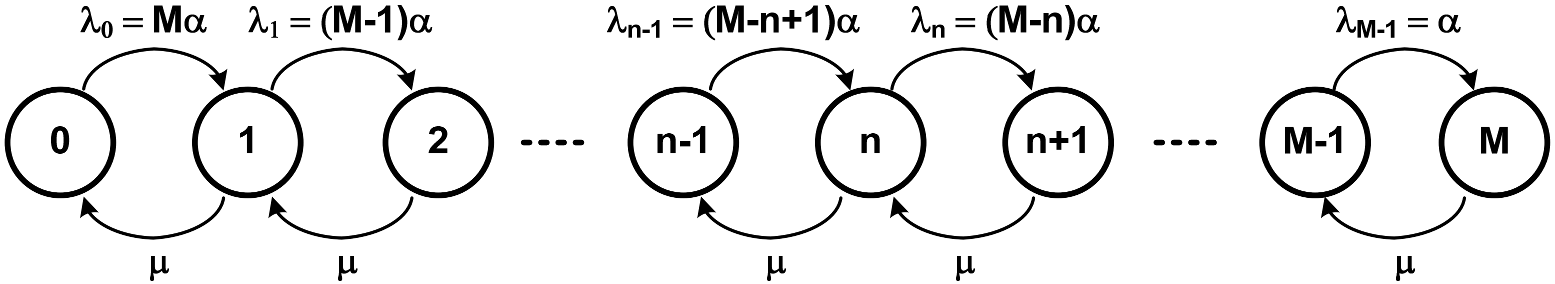
$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}} \qquad p_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}{1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}$$

SdC M/M/1/M/K+1≥M (1/12)

- El SdC M/M/1/M/K+1≥1, con al menos K=M-1 plazas de en la cola espera, es un sistema de espera pura, que se modela por los siguientes parámetros
  - α — tasa de paquetes generada por un terminal libre (a partir de una probabilidad condicionada)
  - μ — tasa de paquetes en la salida del sistema
  - M — número de terminales conectado al sistema

SdC M/M/1/M/K+1≥M (2/12)

- Con los fórmulas regeneradoras, se calcula la fdp de los estados del sistema, con a = $\alpha/\mu = \alpha \cdot t_S = t_S/t_0$



$$p_n = p_0 \frac{M!}{(M-n)!} a^n$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0\ldots M} a^n \left(\frac{M!}{(M-n)!}\right)}$$

$$p_W = 1 - p_0$$

SdC M/M/1/M/≥M (3/12)

- Los valores medios del sistema son los siguientes

$$E(n) = M - \frac{P_W}{a}$$

número medio de paquetes en el sistema

$$E(u) = M - \frac{P_W(1+a)}{a}$$

número medio de paquetes en la cola

$$E(v) = P_W$$

número medio de paquetes en el servidor

$$E(m) = \frac{P_W}{a}$$

número medio terminales libres

SdC M/M/1/M/K+1≥M (4/12)

- Los valores temporales se obtienen con la fórmula de Little

$$t_0 = \frac{t_S}{a} \qquad \tau = t_S\left(\frac{M}{P_W} - \frac{1}{a}\right)$$

$$t_W = t_S\left(\frac{M}{P_W} - \frac{1+a}{a}\right) \qquad E(T) = \frac{t_S M}{P_W}$$

$$t_S = \frac{1}{\mu}$$

- La tasa global de paquetes al sistema, y el tráfico total se pueden calcular como…

$$E(\lambda) = \mu P_W$$

$$A = P_W$$

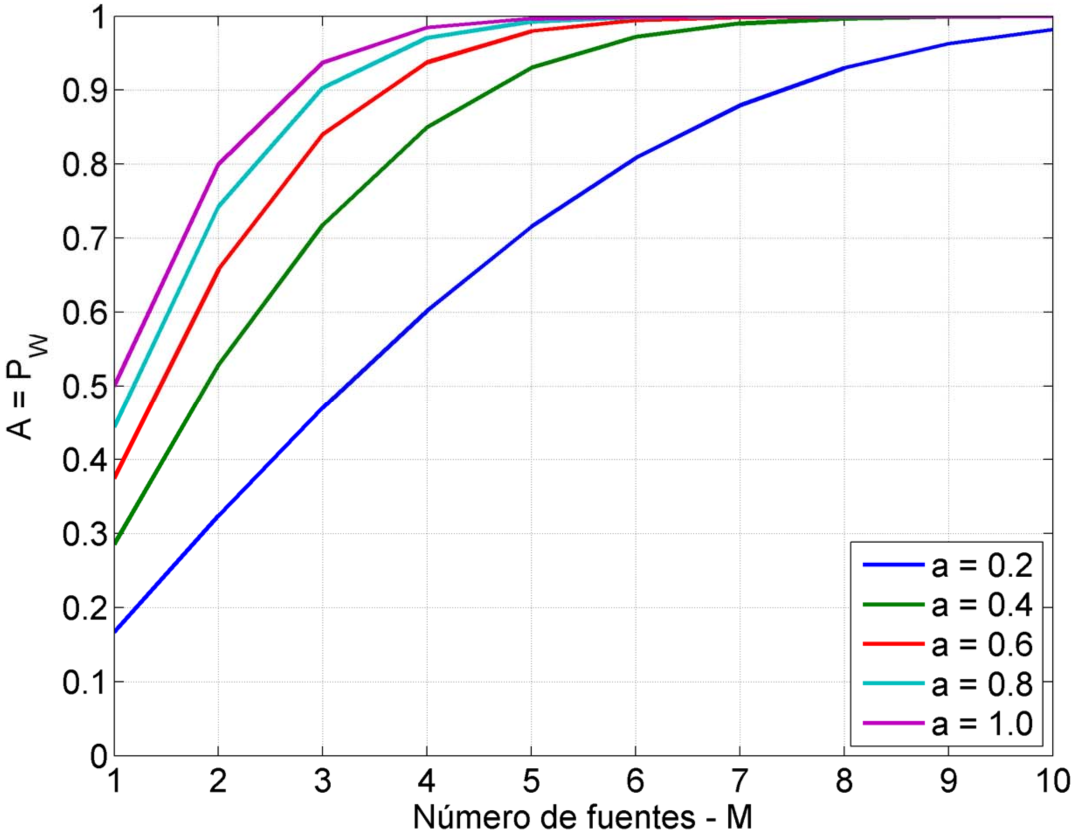
(igual como en el SdC M/M/1)

SdC M/M/1/M/K+1≥M (5/12) Ejemplo (1/3)

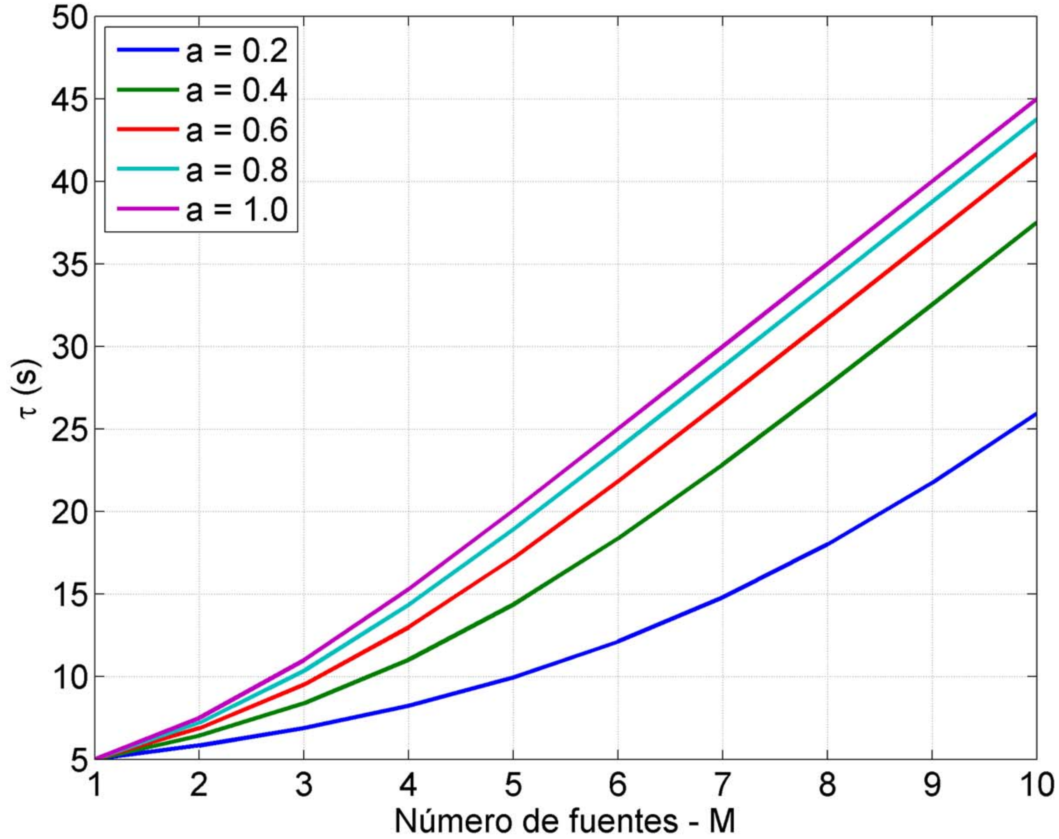
- En una agencia de viajes el diálogo cliente/empleado tiene una duración media (por cada repuesta del sistema de transacción) t_0 = 10 s
- El tiempo de procesado en el sistema del mayorista es t_S = 5 s
- Resulta un tráfico por terminal libre a = 0.5
- Para M=1…10 mesas de atención al cliente, se obtienen los valores de la tabla

M	p0	Pw= A	n	u	t_w [s]	τ [s]
1	0.66667	0.33333	0.3333	0.0000	0.0000	5.0000
2	0.40000	0.60000	0.8000	0.2000	1.6667	6.6667
3	0.21053	0.78947	1.4211	0.6316	4.0000	9.0000
4	0.09524	0.90476	2.1905	1.2857	7.1053	12.1053
5	0.03670	0.96330	3.0734	2.1101	10.9524	15.9524
6	0.01208	0.98792	4.0242	3.0363	15.3670	20.3670
7	0.00344	0.99656	5.0069	4.0103	20.1208	25.1208
8	0.00086	0.99914	6.0017	5.0026	25.0344	30.0344
9	0.00019	0.99981	7.0004	6.0006	30.0086	35.0086
10	0.00004	0.99996	8.0001	7.0001	35.0019	40.0019

- La siguiente figura indica los valores de P_W, en relación con el número de terminales y el tráfico por fuente libre a como parámetro



- La siguiente figura indica los valores de retardo medio τ, en relación con el número de terminales y el tráfico por fuente libre (a) como parámetro



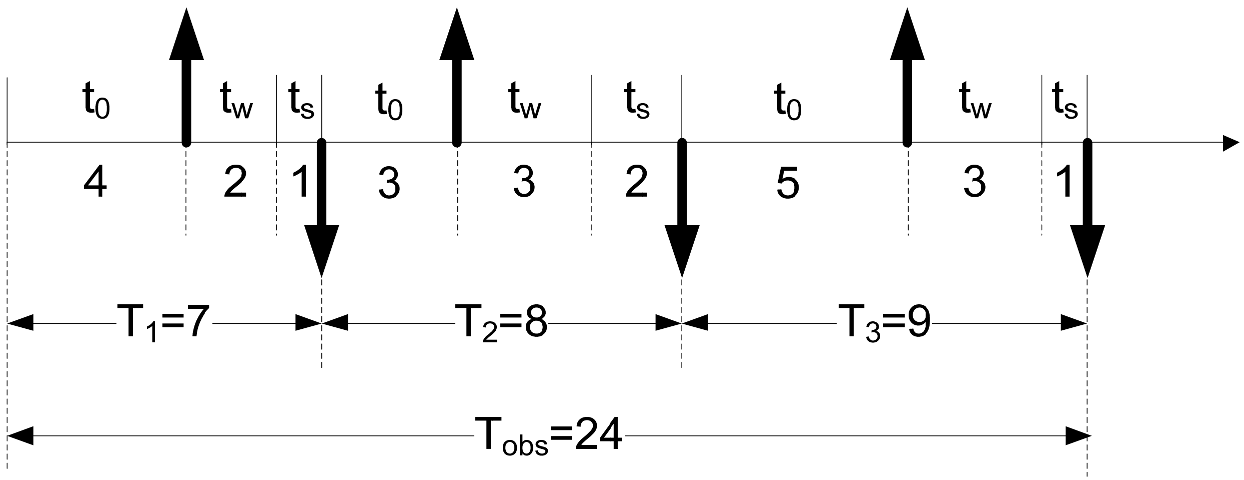
SdC M/M/1/M/K+1≥M (8/12) Cálculo práctico (1/4)

- Las fórmulas del modelo M/M/1/M/K+1≥M se basan en los tres parámetros α, μ, M
- Mientras M y μ son estimables, la tasa de llamadas de una fuente libre α es difícil de estimar, porque requiere observaciones de los clientes del servicio
- Lo que sí se puede medir es el número total de peticiones en un intervalo de observación, para deducir el valor medio λ
- Este valor medio representa la totalidad de las peticiones al sistema de transacción, que se calcula con

  $\lambda = \alpha' M$, con α' la tasa de peticiones de un terminal, independientemente si está libre o no, ya que proviene de una probabilidad absoluta y no de una condicionada

SdC M/M/1/M/K+1≥M (9/12) Cálculo práctico (2/4)

- Ejemplo para ilustrar la diferencia entre α y α', asumiendo M= 4 terminales (fuentes)
- De la figura resulta, por terminal (fuente)
  - $t_0 = [t_0(1) + t_0(2) + t_0(3)]/3 = (4+3+5)/3 = 4$
  - $t_w = [t_w(1) + t_w(2) + t_w(3)]/3 = (2+3+3)/3 = 2.67$
  - $t_s = [t_s(1) + t_s(2) + t_s(3)]/3 = (1+2+1)/3 = 1.33$
  - $T_{obs} = T_1+T_2+T_3 = 7+8+9 =24$
  - $E(T) = t_0 + t_w + t_s = T_{obs}/3 = 8$



SdC M/M/1/M/K+1≥M (10/12) Cálculo práctico (3/4)

- Resulta
  - $\alpha = 1/t_0 = 1/4 = 0.25$
  - $\alpha' = 1/(t_0+t_w+t_s) = 1/(4+2.67+1.33) = 0.125$
- Y con M= 4 terminales…
  - $\lambda = M * \alpha' = 4 \cdot 0.125 = 0.5$ (tasa de llegada al sistema valor “estimable”)
- Y, en general…
  - $\alpha' = \alpha/[1+\alpha\cdot(t_w+t_s)]$ o $\alpha' = \alpha*[M-E(n)]$
  - $\alpha = \alpha'/[1-\alpha'\cdot(t_w+t_s)]$

SdC M/M/1/M/K+1≥M (11/12)
Cálculo práctico (4/4)

- Modelo basado en la tasa M, λ, t_s

  $\lambda = M * \alpha'$, con lo que resulta $\alpha' = \lambda/M$

- con...

  $\alpha = \alpha'/[1-\alpha' \cdot (t_w+t_s)]$

- Se podría calcular α, pero falta conocer t_w, que es parte del resultado
- Se necesita, por tanto, un algoritmo para calcular t_w de forma iterativa

SdC M/M/1/M/K+1≥M (12/12) Algoritmo

- Algoritmo - Dado λ, M, ts, calcula τ, E(T)

```
// Initialization
```

$$A = \lambda \cdot t_S;\ \alpha' = \frac{A}{M \cdot t_S}; t_W = 0; \epsilon = 0.00001$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha'}{1 - \alpha'(t_W + t_S)}; \alpha_1 = \alpha_0; \alpha_0 = \alpha_0 + 2\epsilon$$

```
// Iterative α estimation
Do While abs(α0-α1) > ε
```

$$\alpha_0 = \alpha_1; a = \alpha_0 \cdot t_S$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M} a_n \frac{M!}{(M-n)!}}; p_W = 1 - p_0$$

$$t_W = t_S \left(\frac{M}{P_W} - \frac{1+a}{a} \right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0(t_W + t_S)}$$

```
End Do While
// Overall delay
τ = tw + ts
E(T)= t0 + tw +ts
```

M/M/S/M/K+S/≥M (1/5)

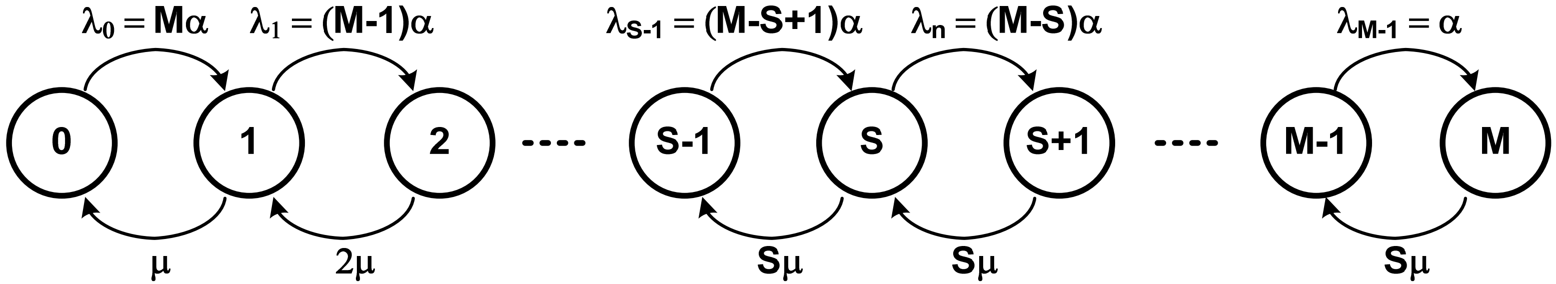
- Es la generalización del SdC M/M/1/M/K+1≥M
- Tiene aplicación para el dimensionado de pico-células en redes móviles UMTS/HSPA o LTE, con tráfico de datos y multimedia
- En este caso S se corresponde con el número de conexiones virtuales que se consideran en una pico-célula (reducido número de usuarios)
- Como alternativa se puede determinar el ancho de banda equivalente necesario por cada conexión y realizar el dimensionado con un sistema pérdida pura (fórmula de Engset)

SdC M/M/S/M/K+S≥M (2/5)

- El SdC M/M/S/≥M con, al menos, K=M-S plazas de en la cola es un sistema de espera pura tipo Markov, que se modela con los siguientes parámetros…
  - α tasa de paquetes generada por un terminal libre (proviene de una probabilidad condicionada)
  - μ tasa de paquetes en la salida del sistema
  - M número de terminales conectados al sistema
  - S número de servidores

SdC M/M/S/M/K+S≥M (3/5)

- Con las ecuaciones regeneradoras se calcula la fdp del estado del sistema con $a = \alpha/\mu = \alpha \cdot t_s = t_s/t_0$



$$p_n = p_0 \binom{M}{n} a^n \quad n = 1 \ldots S$$

$$p_{S+m} = p_0 \binom{M}{S+m} a^{S+m} \frac{(S+m)!}{S!\,S^m} \quad m = 1 \ldots M-1$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \binom{M}{n} a^n + \frac{a^S}{S!} \sum_{m=0}^{M-S} \binom{M}{S+m} a^m \frac{(S+m)!}{S^m}}$$

$$p_W = p_0 \frac{a^S}{S!} \sum_{m=0}^{M-S} \binom{M}{S+m} a^m \frac{(S+m)!}{S^m}$$

SdC M/M/S/M/K+S≥M (4/5)

- Los valores medios del sistema resultan…

$$E(u) = \frac{p_0}{S!} \sum_{(m=0)}^{M-S} m a^m \frac{M!}{\big(M-(m+S)\big)!\, S^m}$$

número medio de paquetes en espera

$$E(n) = \frac{M \cdot a + E(u)}{1+a}$$

número medio de paquetes en sistema

$$E(v) = \frac{a\big(M - E(u)\big)}{1+a}$$

número medio de paquetes en servidor

$$E(m) = M - E(n)$$

número medio de terminales libres

SdC M/M/S/M/K+S≥M (5/5)

- Los valores temporales se obtienen con la fórmula de Little

$$t_0 = \frac{t_S}{a} \qquad \tau = t_S \frac{E(n)}{a\big(M - E(n)\big)}$$

$$t_W = t_S \frac{E(u)}{a\big(M - E(n)\big)} \qquad E(T) = t_S \frac{M + E(u)}{a(M - E(n))}$$

$$t_S = \frac{1}{\mu}$$

- La tasa global de paquetes al sistema, y el tráfico total se pueden calcular como…

$$E(\lambda) = a\frac{M - E(n)}{t_S}$$

$$A = a\big(M - E(n)\big)$$

SdC M/M/S/M/S<M (1/12)

- El SdC M/M/S/S<M es un sistema de pérdida pura tipo Markov, que se modela con los siguientes parámetros
  - α tasa de llamadas generadas por un terminal libre (proviene de una probabilidad condicionada)
  - t_s duración media de una llamada
  - M número de terminales conectados al sistema
- Con $t_0 = 1/\alpha$; $t_s = 1/\mu$
- Observamos que todavía se modela como un sistema de tipo Markov, ya que asumimos que T_0 y T_s se modelan con fdp exponenciales negativas

SdC M/M/S/M/S<M (2/12)

- Con las ecuaciones regeneradoras, se calcula la fdp del estado del sistema, con $a = \alpha/\mu = a \cdot t_s = t_s/t_0$

$$p_n = p_0 \binom{M}{n} a^n$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S} \binom{M}{n} a^n}$$

- De lo que resulta la fdp de Engset

$$p_n = \binom{M}{n} \frac{a^n}{\sum_{n=0}^{S} \binom{M}{n} a^n}$$

SdC M/M/S/M/S<M (3/12)

	$M \rightarrow \infty$ => M/M/∞/∞/∞	$M \leq C < \infty$ => M/M/M/M/M
S ≥ M	fdp Poisson $$p(A) = \frac{A^n}{n!} e^{-A}$$	fdp binomial $$p_n(a) = \binom{M}{n} a^n (1-a)^{M-n}$$
	$M \rightarrow \infty$ => M/M/S/∞/S	**$M \leq C < \infty$ => M/M/S/M/S<M**
S < M	fdp Erlang $$p_n(A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{S} \frac{A^i}{i!}}$$	fdp Engset $$p_n(a,S) = \binom{M}{n} \frac{a^n}{\sum_{i=0}^{S} \binom{M}{i} a^i}$$

SdC M/M/S/M/S<M (4/12)

- De la fdp de Engset resultan las siguientes probabilidades

$$p_b = p_n \Big|_{n=S}$$ probabilidad de bloqueo (probabilidad absoluta)

$$p_L = \frac{\lambda_S}{E(\lambda)} p_b$$ probabilidad de pérdida (probabilidad condicionada)

$$\lambda_S < E(\lambda) \rightarrow p_L < p_b$$

SdC M/M/S/M/S<M (5/12)

- Resulta la Fórmula de Engset

$$p_L = \binom{M-1}{S} \frac{a^S}{\sum_{n=0}^{S} \binom{M-1}{n} a^n}$$

- Que, al igual que la fórmula de Erlang-B, se puede calcular de manera recursiva ($p_0 = 1$)

$$p_k = \frac{(M-k) \cdot a \cdot p_{k-1}}{k + (M-k) \cdot a \cdot p_{k-1}}$$

SdC M/M/S/M/S<M (7/12) Ejemplo (2/2)

- Comparación de las fdp para diferentes ejemplos

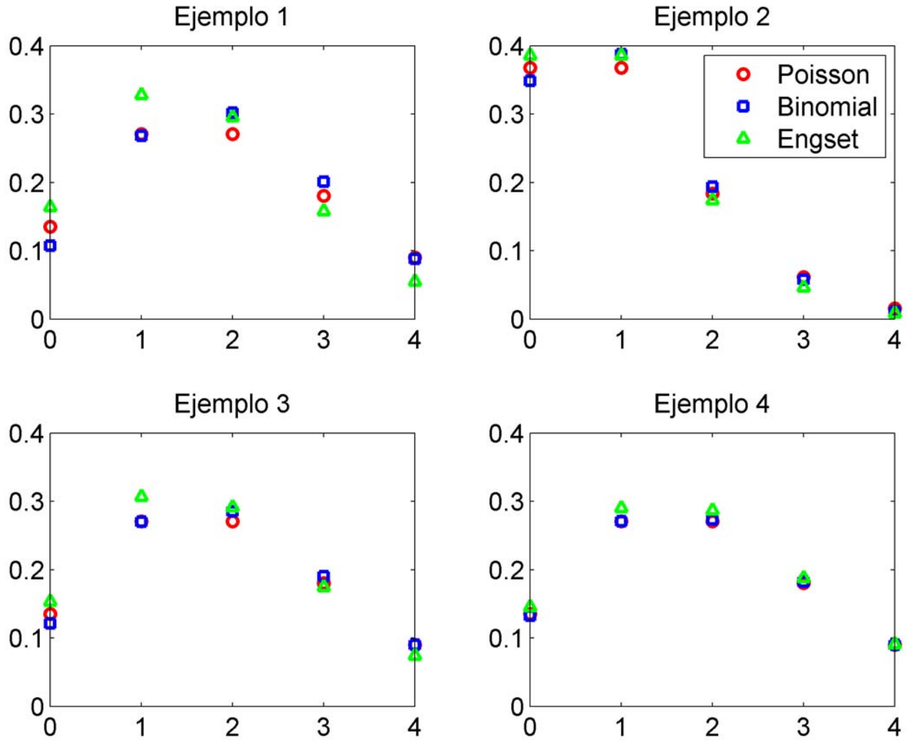
Ejemplo	M	a	S
1	10	0.2	4
2	10	0.1	4
3	20	0.1	4
4	100	0.02	4

Ejemplo	Parámetro	Engset	Erlang
1	**pb**	0.0551	0.0952
	pL	**0.0394**	0.0952
2	**pb**	0.0081	0.0154
	pL	**0.0053**	0.0154
3	**pb**	0.0743	0.0952
	pL	**0.0650**	0.0952
4	**pb**	0.0909	0.0952
	pL	**0.0889**	0.0952

SdC M/M/S/M/S<M (6/12) Ejemplo (1/2)

- Comparación de las fdp para diferentes ejemplos

Ejemplo	M	a	S
1	10	0.2	4
2	10	0.1	4
3	20	0.1	4
4	100	0.02	4

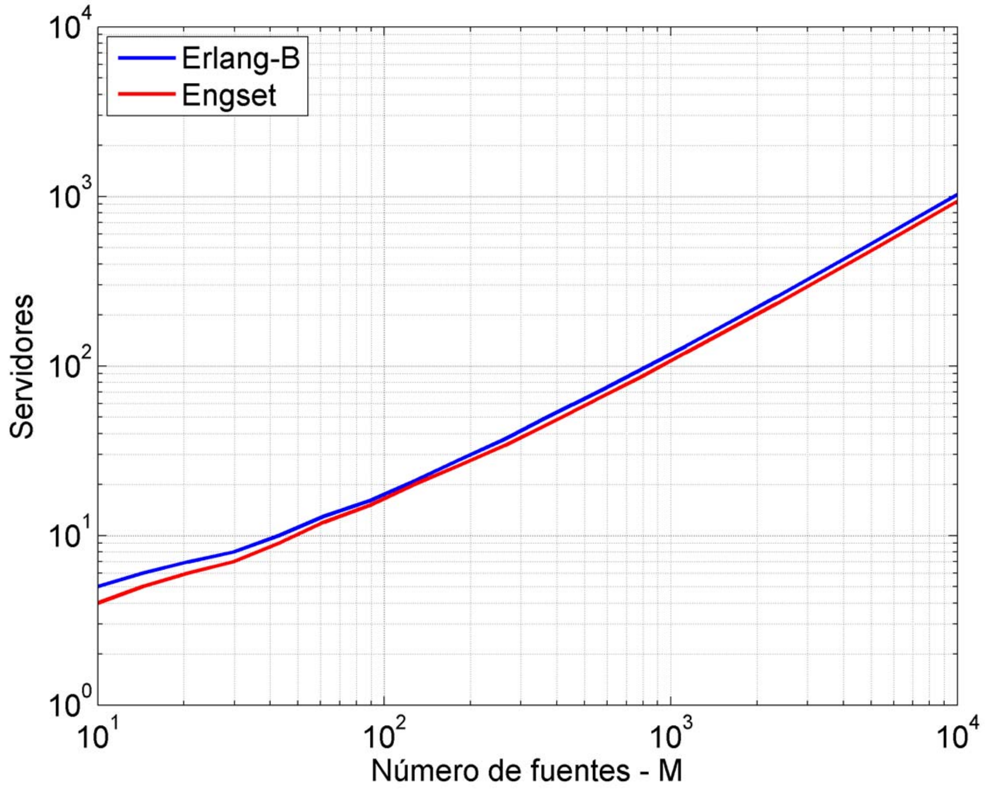


SdC M/M/S/M/S<M (8/12)

- Como sucede con la fórmula de Erlang-B, la de Engset no está limitada a un número entero de servidores, sino que se puede extender a números reales
  - La aplicación sería para el dimensionado de pico-células en redes móviles UMTS y LTE en las que el bloqueo es de tipo *soft* y no *hard*, como sucede en GSM
- Asimismo, la fórmula de Engset depende solamente del valor medio de la duración de una conexión, por lo que e válida para cualquier valor en la desviación típica
- El modelo de Engset se puede aproximar por el modelo de Erlang-B, pues éste proporciona siempre una cota superior en el bloqueo y la pérdida
  - Para un número de usuarios elevado la aproximación con la fórmula de Erlang se acerca, por arriba, al valor de la fórmula de Engset

SdC M/M/S/M/S<M (9/12) Ejemplo (1/2)

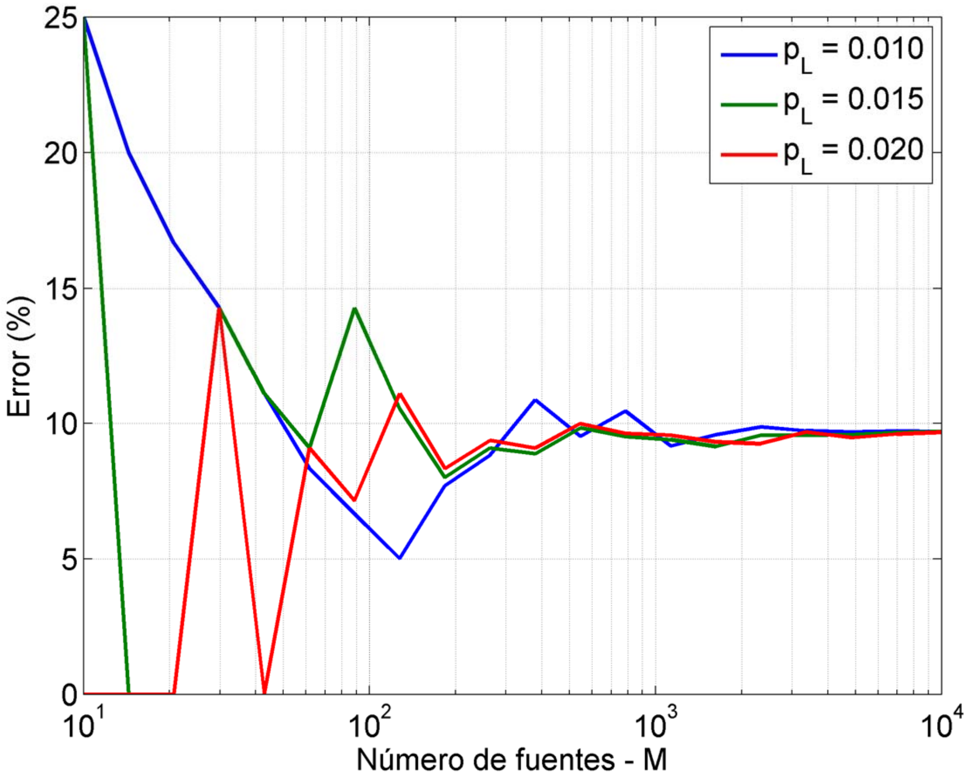
- Comparación Engset/Erlang, para a = 0.1 y pL = 0.01



M	ENG	ERL	error
10	3.85	5.31	37.95%
20	5.62	6.91	22.99%
30	6.99	8.41	20.26%
40	8.51	9.84	15.62%
50	9.81	11.22	14.40%
60	11.03	12.56	13.92%
70	12.34	13.88	12.47%
80	13.57	15.17	11.83%
90	14.75	16.45	11.55%
100	15.89	17.71	11.45%
200	26.99	29.75	10.21%
300	37.56	41.20	9.69%
400	47.78	52.39	9.65%
500	57.83	63.38	9.60%
600	67.76	74.22	9.54%
700	77.59	84.99	9.55%
800	87.34	95.70	9.57%
900	97.02	106.30	9.57%
1000	106.67	116.86	9.55%
2000	201.51	220.90	9.62%
3000	294.87	323.35	9.66%
4000	387.51	425.01	9.68%
5000	479.70	526.19	9.69%
6000	571.61	627.10	9.71%
7000	663.30	727.75	9.72%
8000	754.79	828.25	9.73%
9000	846.15	928.56	9.74%
10000	937.42	1028.85	9.75%

SdC M/M/S/M/S<M (10/12) Ejemplo (2/2)

- Error relativo (Erlang/Engset), para a = 0.1



M	pl =0.01	pl=0.015	pl=0.02
10	37.95%	31.14%	27.91%
20	22.99%	21.14%	21.17%
30	20.26%	16.40%	14.69%
40	15.62%	15.53%	13.33%
50	14.40%	12.95%	12.99%
60	13.92%	12.08%	11.66%
70	12.47%	11.78%	10.98%
80	11.83%	11.68%	10.58%
90	11.55%	11.14%	10.37%
100	11.45%	10.67%	10.26%
200	10.21%	9.79%	9.51%
300	9.69%	9.50%	9.35%
400	9.65%	9.44%	9.34%
500	9.60%	9.46%	9.34%
600	9.54%	9.45%	9.39%
700	9.55%	9.45%	9.35%
800	9.57%	9.48%	9.39%
900	9.57%	9.47%	9.41%
1000	9.55%	9.47%	9.40%
2000	9.62%	9.55%	9.48%
3000	9.66%	9.58%	9.54%
4000	9.68%	9.62%	9.57%
5000	9.69%	9.63%	9.59%
6000	9.71%	9.65%	9.61%
7000	9.72%	9.67%	9.62%
8000	9.73%	9.68%	9.63%
9000	9.74%	9.69%	9.64%
10000	9.75%	9.69%	9.65%

- Como se vio en el SdC M/M/1/M/≥M, la tasa de llamadas por terminal α no se conoce, sino que se estima la tasa total que llega al sistema
- Sea…
  - $a = \alpha \cdot ts$ tráfico ofrecido por terminal (libre)
  - $A = E(\lambda) \cdot ts$ valor medio del tráfico total ofrecido
- Resulta, al aplicar la fórmula de Engset…

$$A = \frac{M \cdot a}{1 + a(1 - p_L)}$$

$$a = \frac{A}{M - A(1 - p_L)}$$

SdC M/M/S/M/S<M (12/12) Algoritmo

- Algoritmo - Dado M, A, S, calcula p_L

```
// Initialization
```

$$p_{0_L} = 0; a = \frac{A}{M - A\left(1 - p_{0_L}\right)}; \; p_{1_L} = \binom{M-1}{S} \frac{a^S}{\sum_{n=0}^{S} \binom{M-1}{n} a^n}$$

```
// Iterative pL estimation
Do While abs(p0L-p1L) > ε
```

$$p_{0_L} = p_{1_L}; a = \frac{A}{M - A\left(1 - p_{0_L}\right)}; p_{1_L} = \binom{M-1}{S} \frac{a^S}{\sum_{n=0}^{S} \binom{M-1}{n} a^n}$$

```
End Do While
pL = p1L
```